Álgebra Linear 2018.1

Aula 19:

Autovalores e Autovetores/ Diagonalização

Autovetores e Autovalores

Seja $T:V\rightarrow V$ um operador linear. Um vetor $v \in V$, $v\neq 0$, é autovetor do operador T se existe $\lambda \in IR$ tal que

$$T(v)= \lambda v. \qquad (1)$$

Seja M a matriz desta transformação em relação à base canônica então (1) pode ser rescrito como

$$Mv=\lambda v$$

$$\lambda v-Mv=0$$

ou ainda

$$\lambda Iv-Mv=0$$

$$(\lambda I-M)v=0. \qquad (2)$$

Determinar se operador T possui um autovetor $v\neq 0$ equivale a determinar para quais valores de λ o sistema homogêneo (1) tem solução não trivial, tal valor de λ é chamado **autovalor** da matriz M (ou seja será autovalor do operador T).

- Se λ é um autovalor de M então cada solução não trivial de (2) será o **autovetor** de M associado ao autovalor λ, ou seja será autovetor do operador T.

Autovetores e Autovalores

De acordo com o que já estudamos

M é invertível ↔ Mv=0 tem somente solução trivial

logo

(λI-M)v=0 tem solução não trivial ↔ (λI-M) não é invertível,

ou seja,

$$\det(\lambda I - M) = 0$$

p(λ)=det(λI-M) é chamado **polinômio característico** da matriz M (ou do operador T)

Exemplo: **4ª Questão.**[2 pts] Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por

$$T(x, y) = (5x + 4y, x + 2y),$$

(a) Determine $[T]$ (matriz de T em relação a base canônica).

(b) Seja M=[T], encontre os autovalores de M e dê exemplo de autovetores associados a cada autovalor

Multiplicidade dos autovalores

Multiplicidade algébrica

A multiplicidade algébrica dos autovalores indica a quantidade de vezes que um determinado autovalor aparece como solução do polinômio característico.

Multiplicidade geométrica

A multiplicidade geométrica dos autovalores indica a dimensão do autoespaço associado a um determinado autovalor, ou seja, a quantidade de vetores na base do autoespaço.

Exemplo

Encontre a multiplicidade algébrica e geométrica da matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Autovetores e Autovalores

Teorema: Se A é uma matriz nxn, então as seguintes afirmações são equivalentes:

a) A é invertível.

b) **Ax=0** só tem a solução trivial.

c) A forma escalonada reduzida por linhas de A é I_n.

d) A pode ser expressa como um produto de matrizes elementares.

e) **Ax=b** é consistente para cada vetor coluna **b** de tamanho nx1.

f) **Ax=b** tem exatamente uma solução para cada vetor coluna **b** nx1.

g) $\det(A) \neq 0$.

h) A tem posto n.

i) As linhas de A formam um conjunto L.I. de n vetores do IR^n.

j) As colunas de A formam um conjunto L.I. de n vetores do IR^n.

k) Zero não é um autovalor de A.

Diagonalização de operadores

Seja T: V→ V um operador linear. Dizemos que T é um operador diagonalizável se existe uma base β de V cujos elementos são autovetores de T.

A matriz que representa T na base β é uma matriz diagonal cujos elementos são os autovalores de T, ou seja:

$$[T]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Quando existe esta base β há uma relação entre a representação do operador T nesta base, com a sua representação em qualquer outra base.

Diagonalização de operadores

Seja M=[T] a matriz canônica do operador T e **D** a matriz de T na base β de autovetores, dizemos que T é diagonalizável se existe uma matriz P tal que

$$\mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{MP}.$$

Onde **P** é a matriz cujas colunas são os autovetores de T e $D=[T]_\beta$.

Assim, a matriz **D** é obtida pela matriz **P**, quando ela existe, sobre a matriz **M**. Dizemos então que a matriz **P** diagonaliza **M** ou que **P** é a matriz diagonalizadora (**P** a matriz de mudança da base de β para a base canônica).

Quando sabemos que é possível encontrar a matriz P e obter D?