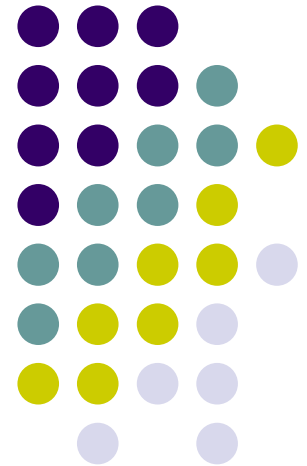


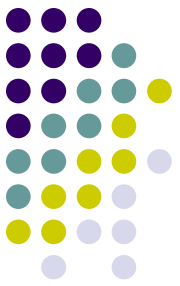
Álgebra Linear

2018.1

Aula 19:
Autovalores e Autovetores/
Diagonalização



Autovetores e Autovalores



Seja $T:V \rightarrow V$ um operador linear. Um vetor $v \in V$, $v \neq 0$, é autovetor do operador T se existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$T(v) = \lambda v. \quad (1)$$

Seja M a matriz desta transformação em relação à base canônica então (1) pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} Mv &= \lambda v \\ \lambda v - Mv &= 0 \end{aligned}$$

ou ainda

$$\begin{aligned} \lambda I v - Mv &= 0 \\ (\lambda I - M)v &= 0. \quad (2) \end{aligned}$$

Determinar se operador T possui um autovetor $v \neq 0$ equivale a determinar para quais valores de λ o sistema homogêneo (1) tem solução não trivial, tal valor de λ é chamado **autovalor** da matriz M (ou seja será autovalor do operador T).

- Se λ é um autovalor de M então cada solução não trivial de (2) será o **autovetor** de M associado ao autovalor λ , ou seja será autovetor do operador T .

Autovetores e Autovalores

De acordo com o que já estudamos

M é invertível $\leftrightarrow Mv=0$ tem somente solução trivial

logo

$(\lambda I - M)v=0$ tem solução não trivial $\leftrightarrow (\lambda I - M)$ não é invertível,

ou seja,

$$\det(\lambda I - M) = 0$$

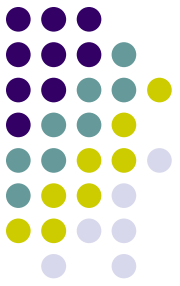
$p(\lambda) = \det(\lambda I - M)$ é chamado **polinômio característico** da matriz M (ou do operador T)

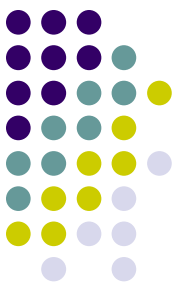
Exemplo: 4ª Questão. [2 pts] Seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por

$$T(x, y) = (5x + 4y, x + 2y),$$

(a) Determine $[T]$ (matriz de T em relação a base canônica).

(b) Seja $M = [T]$, encontre os autovalores de M e dê exemplo de autovetores associados a cada autovalor





Multiplicidade dos autovalores

Multiplicidade algébrica

A multiplicidade algébrica dos autovalores indica a quantidade de vezes que um determinado autovalor aparece como solução do polinômio característico.

Multiplicidade geométrica

A multiplicidade geométrica dos autovalores indica a dimensão do autoespaço associado a um determinado autovalor, ou seja, a quantidade de vetores na base do autoespaço.

Exemplo

Encontre a multiplicidade algébrica e geométrica da matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

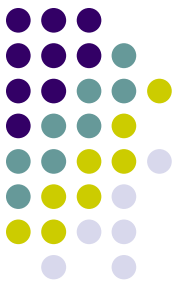
Autovetores e Autovalores



Teorema: Se A é uma matriz $n \times n$, então as seguintes afirmações são equivalentes:

- a) A é invertível.
- b) $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ só tem a solução trivial.
- c) A forma escalonada reduzida por linhas de A é I_n .
- d) A pode ser expressa como um produto de matrizes elementares.
- e) $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ é consistente para cada vetor coluna \mathbf{b} de tamanho $n \times 1$.
- f) $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ tem exatamente uma solução para cada vetor coluna \mathbf{b} $n \times 1$.
- g) $\det(A) \neq 0$.
- h) A tem posto n .
- i) As linhas de A formam um conjunto L.I. de n vetores do \mathbb{R}^n .
- j) As colunas de A formam um conjunto L.I. de n vetores do \mathbb{R}^n .
- k) Zero não é um autovalor de A .

Diagonalização de operadores



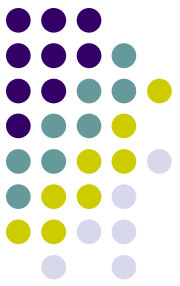
Seja $T: V \rightarrow V$ um operador linear. Dizemos que T é um operador diagonalizável se existe uma base β de V cujos elementos são autovetores de T .

A matriz que representa T na base β é uma matriz diagonal cujos elementos são os autovalores de T , ou seja:

$$[T]_{\beta}^{\beta} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Quando existe esta base β há uma relação entre a representação do operador T nesta base, com a sua representação em qualquer outra base.

Diagonalização de operadores



Seja $M=[T]$ a matriz canônica do operador T e \mathbf{D} a matriz de T na base β de autovetores, dizemos que T é diagonalizável se existe uma matriz P tal que

$$\mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{P}.$$

Onde \mathbf{P} é a matriz cujas colunas são os autovetores de T e $\mathbf{D}=[T]_{\beta}$.

Assim, a matriz \mathbf{D} é obtida pela matriz \mathbf{P} , quando ela existe, sobre a matriz \mathbf{M} . Dizemos então que a matriz \mathbf{P} diagonaliza \mathbf{M} ou que \mathbf{P} é a matriz diagonalizadora (\mathbf{P} a matriz de mudança da base de β para a base canônica).

Quando sabemos que é possível encontrar a matriz \mathbf{P} e obter \mathbf{D} ?