3.8 – Derivação implícita

Todas as funções estudadas até agora foram dadas por equações da forma y = f(x), onde a variável dependente y é definida **explicitamente** por uma expressão envolvendo a variável independente x. Por exemplo, $y = x^3 - 4x + 1$ e $y = 7x + \sqrt{x - 6}$

Muitas funções, no entanto, são definidas **implicitamente** por uma equação que envolve tanto a variável independente como a variável dependente. Por exemplo:

$$(1) \quad xy = 3 \quad \text{e} \quad (2) \quad 5 - x^2 + 4y^3 = 7y$$

Em alguns casos é possível resolver a equação e escrever a variável dependente na forma explícita. É o caso da equação (1) acima, onde $y = \frac{3}{x}$. Mas não é fácil resolver a equação (2) e escrever y explícitamente em função de x.

Vamos supor que conhecemos uma equação que define y implicitamente como uma função de x e precisamos determinar a derivada $\frac{dy}{dx}$.

Não é necessário escrever y explícitamente em função de x para encontrar $\frac{dy}{dx}$. Podemos derivar a equação termo a termo, utilizando a regra da cadeia quando derivarmos os termos contendo y e, a seguir, explicitamos $\frac{dy}{dx}$. Esta técnica é conhecida como **derivação implícita**.

Exemplos:

1) Suponha que a equação (2) acima, defina uma função derivável tal que y = f(x). Calcule $\frac{dy}{dx}$.

Solução: Temos que $5 - x^2 + 4y^3 = 7y$. Derivando implicitamente ambos os lados dessa equação em relação a x obtemos:

$$0 - 2x + 12y^2\frac{dy}{dx} = 7\frac{dy}{dx}$$

Daí $12y^2\frac{dy}{dx} - 7\frac{dy}{dx} = 2x$

$$\frac{dy}{dx}(12y^2 - 7) = 2x$$

Logo $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{12y^2 - 7}$

2) Determine o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função y = f(x) definida implicitamente na equação $x^2y^3 - 5y^3 = x + 6$ no ponto (2 , – 2).

Solução: Derivando implicitamente a equação dada em relação a x temos:

$$2xy^3 + x^2 .\, 3y^2 \frac{dy}{dx} - 15y^2 \frac{dy}{dx} = 1 + 0$$

$$3x^2y^2 \frac{dy}{dx} - 15y^2 \frac{dy}{dx} = 1 - 2xy^3$$

$$\frac{dy}{dx}(3x^2y^2 - 15y^2) = 1 - 2xy^3$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - 2xy^3}{3x^2y^2 - 15y^2}$$

Para determinar o coeficiente angular m da reta tangente basta substituir x = 2 e y = – 2 na expressão da derivada. Então m = $\frac{33}{-12} = -\frac{11}{4}$

Em algumas aplicações, x e y estão relacionadas por uma equação, e ambas as variáveis são funções de uma terceira variável t (que quase sempre representa o tempo) e as fórmulas que descrevem x e y como funções de t não são conhecidas. Nesse caso, a derivação implícita pode ser usada para relacionar $\frac{dx}{dt}$ com $\frac{dy}{dt}$ e a equação relacionando as taxas pode ser utilizada para determinar uma delas quando a outra é conhecida. Nesse contexto, $\frac{dx}{dt}$ e $\frac{dy}{dt}$ são chamadas de **taxas relacionadas**.

Exemplos:

1) Seja $x^2 - y^2 = 1$ e suponha que x e y são funções de t. Determine $\frac{dx}{dt}$ sabendo que x = 4, y = 5 e $\frac{dy}{dt} = 0{,}08$.

Solução: Derivando implicitamente a equação dada em relação a t: $2x\frac{dx}{dt} - 2y\frac{dy}{dt} = 0$

Daí $x\frac{dx}{dt} - y\frac{dy}{dt} = 0$.

Para x = 4, y = 5 e $\frac{dy}{dt} = 0{,}08$ temos: $4\frac{dx}{dt} - 0{,}4 = 0$.

Logo $\frac{dx}{dt} = 0{,}1$

2) Um tumor é modelado por uma esfera de raio R. Se o raio do tumor é atualmente R = 0,54 cm e está aumentando à taxa de 0,13 cm por mês, determine a taxa correspondente de aumento do volume $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Solução: Derivando implicitamente a equação em relação a t temos: $\frac{dV}{dt} = \frac{4}{3}\pi.\ 3R^2.\frac{dR}{dt}$

Daí $\frac{dV}{dt} = 4\pi.R^2.\frac{dR}{dt}$

Como R = 0,54 e $\frac{dR}{dt} = 0{,}13$ então $\frac{dV}{dt} = 4\pi.(0{,}54)^2.(0{,}13) \cong 0{,}47$

Logo o tumor está aumentando 0,47cm^3 por mês.

Outros exemplos:

1) Sabendo que x e y estão relacionados pela equação $\sqrt{x^2 + y^2} - x^2 = 5$, determine $\frac{dy}{dx}$ usando derivação implícita.

2) Determine o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função y = f(x) definida implicitamente na equação $2x^2 + y^3 + y - 6 = 3xy$ no ponto (1, 2).

3) Suponha que x e y são funções da variável t e estão relacionadas pela equação $x^3 - 2y^2 + 5x = 16$. Se x = 2, y = – 1 e $\frac{dx}{dt} = 4$, determine $\frac{dy}{dt}$.

4) Quando o ar se expande adiabaticamente (sem ganhar ou perder calor), sua pressão P e o volume V estão relacionados pela equação $PV^{1,4} = C$ onde C é uma constante. Suponha que em um certo instante o volume é 400 cm^3 e a pressão é 80 KPa e está decrescendo a uma taxa de 10 KPa/min. A que taxa está crescendo o volume nesse instante?

Respostas:

1) $\frac{dy}{dx} = \frac{2x\sqrt{x^2 + y^2} - x}{y}$

2) $m = \frac{1}{5}$

3) $\frac{dy}{dt} = -17$

4) 35,7 cm^3/min

Exercícios de Derivação Implícita

Nas questões de 1 a 4 encontre dy / dx através de derivação implícita:

1) $4xy^2 + 3x^2y = 2$

2) $x^2y - xy^2 + x^2 = 7$

3) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$

4) $\sqrt{x+y} = x$

Nas questões de 5 a 8 determine o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função definida implicitamente pela equação dada para o valor indicado.

5) $x^2 = y^3$; $x = 8$

6) $xy = 2$; $x = 2$

7) $x^2y^3 - 2xy = 6x + y + 1$; $x = 0$

8) $(2x + y)^3 = x$; $x = -1$

Nas questões de 9 a 12 escreva a equação da reta tangente ao gráfico da função definida implicitamente pela equação dada no ponto indicado.

9) $4x^2 + 9y^2 = 36$; $P = (0, 2)$

10) $x^2y^3 - y^2 + xy = 1$; $P = (1,1)$

11) $x^2y^2 + 2xy = 0$; $P = (2, -1)$

12) $(1 - x + y)^3 = x + 7$; $P = (1, 2)$

13) Um pequeno balão esférico é introduzido em uma artéria obstruída e inflado à razão de $0{,}002\pi$ mm^3/min. Qual é a taxa de aumento do raio do balão quando o raio é R = 0,005 mm?

14) A lei de Boyle estabelece que quando uma amostra de gás está comprimida a uma temperatura constante, a pressão P e o volume V estão relacionados pela equação PV = C onde C é uma constante. Suponha que em certo instante o volume é 600 cm^3, a pressão é 150 KPa e a pressão cresce a uma taxa de 20 KPa/ min. A que taxa está decrescendo o volume nesse instante?

Respostas:

1) $\dfrac{-4y^2 - 6xy}{8xy + 3x^2}$

2) $\dfrac{y^2 - 2xy - 2x}{x^2 - 2xy}$

3) $\dfrac{-\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$

4) $2\sqrt{x+y} - 1$

5) $\dfrac{1}{3}$

6) $\dfrac{-1}{2}$

7) -4

8) $\dfrac{-5}{3}$

9) $y = 2$

10) $y = -\dfrac{3}{2}x + \dfrac{5}{2}$

11) $y = \dfrac{x}{2} - 2$

12) $y = \dfrac{13}{12}x + \dfrac{11}{12}$

13) 20 mm/min

14) – 80 cm^3/min