UFF – Departamento de Análise
GAN00140 – Álgebra Linear – E1 - 2018.1 – Profª. Ana Maria Luz F. do Amaral

Gabarito da Lista 4– Determinantes

1. Solução. a) 270; b) 8/10; c) 1/80; d) -10

2. Solução. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & 2 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix}^{L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1} = 2x\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} \\ 1 & 3 & 2 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 = 2x\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix}_{L_3 \leftarrow L_3 - 5L_1} =$

$2x\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{27}{2} \end{vmatrix} L_2 \leftarrow \frac{2}{5}L_2 = 2x\frac{5}{2}x\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{6}{10} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{27}{2} \end{vmatrix}_{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{2}L_2} = 2x\frac{5}{2}x\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{6}{10} \\ 0 & 0 & -\frac{132}{10} \end{vmatrix}$

O termo principal é $1x1x\left(-\frac{132}{10}\right) = -\frac{132}{10}$. Logo,

det A = $2x\frac{5}{2}x\left(-\frac{132}{10}\right) = \frac{10}{2}x\left(-\frac{132}{10}\right) = -\frac{132}{2} = -66.$

3. Solução. $\sqrt{x} = 2$.

4. Solução. $f(\det A) = -(\det A)^2$+3(detA)+2= -8.

5. Solução. a) $\begin{vmatrix} 4 & 6 & x \\ 5 & 2 & -x \\ 7 & 4 & 2x \end{vmatrix} = 4(4x+4x) - 6(10x+7x) + x(20-14) = 32x - 102x + 6x = -64x$

$-64x = -128 \Rightarrow x = 2.$

(b) $\begin{vmatrix} x+3 & x+1 & x+4 \\ 4 & 5 & 3 \\ 9 & 10 & 7 \end{vmatrix} = -7$

$\begin{vmatrix} x+3 & x+1 & x+4 \\ 4 & 5 & 3 \\ 9 & 10 & 7 \end{vmatrix} = (x+3)(35-30) - (x+1)(28-27) + (x+4)(40-45) =$

Solução. $5x + 15 - x - 1 - 5x - 20 = -x - 6$

$-x - 6 = -7 \Rightarrow x = 1.$

6. Solução: $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

7. Solução. detB = det(P^{-1}AP) = detP^{-1}.detA. detP = det(P^{-1}.P).detA = detI.detA = detA.

8. Solução. $A^4 = \begin{bmatrix} x^4 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A^4 = 64x^4 \Rightarrow x = \frac{1}{2}.$

9. Solução. Falso. Contra-exemplo $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

10. Solução. $AA^t = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 21 \end{bmatrix}$ e seu determinante é igual a 56.

11. Solução. x = 67/9.

12 Solução. det A = 1(45-48) -2(36-42) +3(32-35) = 0.

13 a)Temos que $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ é autovetor e o autovalor correspondente é $\lambda = 3$.

13 b) Temos que $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ é autovetor e o autovalor correspondente é $\lambda = 4$.

14 a) $\lambda = 2$ é um autovalor e os autovetores correspondente são da forma (x, 0).

14 b). Os autovalores de A são 4 e 3.
Para o autovalor 4 os autovetores são da forma (x, x) e para o autovalor 3 a base do autoespaço é (3x, 2x).

15 a) Os autovalores são 1, -2 e 3. Para o autovalor 1 os autovetores são da forma (x, 0, 0), para o autovalor -2 da forma (x, -3x, 0)} e para o autovalor 3 da forma é (x, 2x, 10x).

15 b) Os autovalores são 2, 3 e 6. Para o autovalor 2 os autovetores são da forma (-x, 0, x), para o autovalor -2 da forma (x, x, x)} e para o autovalor 3 da forma é (x, -2x, x).

- **Álgebra Linear com Aplicações, H. Anton e C. Rorres, Bookman, 2001.**

CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 2.1 [página 81]

1. **(a)** 5 **(b)** 9 **(c)** 6 **(d)** 10 **(e)** 0 **(f)** 2

2. **(a)** Ímpar **(b)** Ímpar **(c)** Par **(d)** Par **(e)** Par **(f)** Par

3. 22 **4.** 0 **5.** 52 **6.** $-3\sqrt{6}$ **7.** $a^2 - 5a + 21$ **8.** 0

9. -65 **10.** -4 **11.** -123 **12.** $-c^4 + c^3 - 16c^2 + 8c - 2$

13. **(a)** $\lambda = 1, \lambda = -3$ **(b)** $\lambda = -2, \lambda = 3, \lambda = 4$ **16.** 275

17. **(a)** $= -120$ **(b)** $= -120$ **18.** $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{33}}{4}$ **22.** É igual a 0 se $n > 1$.

24. O determinante é igual ao produto das entradas da diagonal.

25. O determinante é igual ao produto das entradas da diagonal.

CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 2.2 [página 84]

2. **(a)** -30 **(b)** -2 **(c)** 0 **(d)** 0 **3.** **(a)** -5 **(b)** -1 **(c)** 1

4. 30 **5.** 5 **6.** -17 **7.** 33 **8.** 39 **9.** 6 **10.** $-\frac{1}{6}$

11. -2 **12.** **(a)** -6 **(b)** 72 **(c)** -6 **(d)** 18

16. **(a)** $\det(A) = -1$ **(b)** $\det(A) = 1$ **17.** $x = 0, -1, \frac{1}{2}$ **18.** $x = 1, -3$

CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 2.3 [página 89]

1. **(a)** $\det(2A) = -40 = 2^2 \det(A)$ **(b)** $\det(-2A) = -448 = (-2)^3 \det(A)$

2. $\det AB = -170 = (\det A)(\det B)$

4. **(a)** Invertível **(b)** Não-invertível **(c)** Não-invertível **(d)** Não-invertível

5. **(a)** -189 **(b)** $-\frac{1}{7}$ **(c)** $-\frac{8}{7}$ **(d)** $-\frac{1}{56}$ **(e)** 7

6. Se $x = 0$, a primeira e terceira linhas são proporcionais.
Se $x = 2$, a primeira e segunda linhas são proporcionais.

12. **(a)** $k = \dfrac{5 \pm \sqrt{17}}{2}$ **(b)** $k = -1$

-

14. **(a)** $\begin{bmatrix} \lambda-1 & -2 \\ -2 & \lambda-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} \lambda-2 & -3 \\ -4 & \lambda-3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ **(c)** $\begin{bmatrix} \lambda-3 & -1 \\ 5 & \lambda+3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

15. (i) $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$ (ii) $\lambda = -1, \lambda = 3$ (iii) $\begin{bmatrix} -t \\ t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix}$

(i) $\lambda^2 - 5\lambda - 6 = 0$ (ii) $\lambda = -1, \lambda = 6$ (iii) $\begin{bmatrix} -t \\ t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{3}{4}t \\ t \end{bmatrix}$

(i) $\lambda^2 - 4 = 0$ (ii) $\lambda = -2, \lambda = 2$ (iii) $\begin{bmatrix} -\frac{t}{5} \\ t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -t \\ t \end{bmatrix}$

20. Não **21.** AB é singular.

22. **(a)** Falsa **(b)** Verdadeira **(c)** Falsa **(d)** Verdadeira

23. **(a)** Verdadeira **(b)** Verdadeira **(c)** Falsa **(d)** Verdadeira

CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 2.4 [página 95]

1. **(a)** $M_{11} = 29, M_{12} = 21, M_{13} = 27, M_{21} = -11, M_{22} = 13, M_{23} = -5, M_{31} = -19, M_{32} = -19, M_{33} = 19$
(b) $C_{11} = 29, C_{12} = -21, C_{13} = 27, C_{21} = 11, C_{22} = 13, C_{23} = 5, C_{31} = -19, C_{32} = 19, C_{33} = 19$

2. **(a)** $M_{13} = 0,\ C_{13} = 0$ **(b)** $M_{23} = -96,\ C_{23} = 96$ **3.** 152
(c) $M_{22} = -48,\ C_{22} = -48$ **(d)** $M_{21} = 72,\ C_{21} = -72$

4. **(a)** $\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} 29 & 11 & -19 \\ -21 & 13 & 19 \\ 27 & 5 & 19 \end{bmatrix}$ **(b)** $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{29}{152} & \frac{11}{152} & -\frac{19}{152} \\ -\frac{21}{152} & \frac{13}{152} & \frac{19}{152} \\ \frac{27}{152} & \frac{5}{152} & \frac{19}{152} \end{bmatrix}$

5. -40 **6.** -66 **7.** 0 **8.** $k^3 - 8k^2 - 10k + 95$ **9.** -240 **10.** 0

11. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -5 & -5 \\ -3 & 4 & 5 \\ 2 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ **12.** $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & \frac{3}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ **13.** $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

14. $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ \frac{29}{12} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$ **15.** $A^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -7 & 0 & -1 & 8 \\ 6 & 0 & 1 & -7 \end{bmatrix}$

16. $x_1 = 1, x_2 = 2$ **17.** $x = \frac{3}{11}, y = \frac{2}{11}, z = -\frac{1}{11}$

18. $x = -\frac{144}{55}, y = -\frac{61}{55}, z = \frac{46}{11}$ **19.** $x_1 = -\frac{30}{11}, x_2 = -\frac{38}{11}, x_3 = -\frac{40}{11}$

20. $x_1 = 5, x_2 = 8, x_3 = 3, x_4 = -1$ **21.** A regra de Cramer não é aplicável.

22. $A^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **23.** $y = 0$ **24.** $x = 1, y = 0, z = 2, w = 0$

31. $\det(A) = 10 \times (-108) = -1080$ **33.** 12 **34.** Um

35. **(a)** Verdadeira **(b)** Falsa **(c)** Verdadeira **(d)** Falsa

Exercícios 7.3

1 **(a)** 1 **(b)** 1 **(c)** 5

2 **(a)** 2 **(b)** −1 **(c)** 1

3 **(a)** $x = 1, y = -1$

(b) $x = -2, y = 3$

(c) $x = 7, y = -10$

4 **(a)** $400 - 5P_1 - 3P_2 = -60 + 3P_1 \Rightarrow 8P_1 + 3P_2 = 460$

$300 - 2P_1 - 3P_2 = -100 + 2P_2 \Rightarrow 2P_1 + 5P_2 = 400$

(b) $32\frac{6}{17}$

5 **(a)** $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -a & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Y \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I^* \\ b \end{bmatrix}$

(b) $C = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & I^* \\ -a & b \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -a & 1 \end{vmatrix}} = \dfrac{b + aI^*}{1-a}$

Exercícios 7.3*

1 **(a)** $x_1 = \dfrac{\det(\mathbf{A}_1)}{\det(\mathbf{A})} = \dfrac{72}{18} = 4$

(b) $x_2 = \dfrac{\det(\mathbf{A}_2)}{\det(\mathbf{A})} = \dfrac{126}{42} = 3$

(c) $x_4 = \dfrac{\det(\mathbf{A}_4)}{\det(\mathbf{A})} = \dfrac{-1425}{475} = -3$

2 $\dfrac{b - aT^* + a(I^* + G^*)(t-1)}{1 - a + at}$

3 **(a)** $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -a & 1 & a \\ -t & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Y \\ C \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I^* + G^* \\ b \\ T^* \end{bmatrix}$

(b) $Y = \dfrac{I^* + G^* + b - aT^*}{1 - a + at}$

4 As equações podem ser recompostas

$$Y - C + M = I^* + G^* + X^*$$
$$-aY + C + 0M = b$$
$$-mY + 0C + M = M^*$$

como requerido.

O multiplicador de investimento autônomo, $\dfrac{1}{1-a+m}$, é positivo porque $1 - a$ e m também são positivos.

5 O multiplicador é

$$\frac{-k_1}{k_2(1-a) + ck_1}$$

que é positivo, pois as partes superior e inferior dessa fração são negativas. Para verificar se a parte inferior é negativa, observe que $k_2(1 - a) < 0$porque $k_2 < 0$ e $a < 1$, e $ck_1 < 0$ porque $c < 0$ e $k_1 > 0$.

6 As equações são

$$0{,}6Y_1 - 0{,}1Y_2 - I_1^* = 50$$
$$-0{,}2Y_1 + 0{,}3Y_2 = 150$$
$$0{,}2Y_1 - 0{,}1Y_2 = 0$$

A terceira equação origina do fato de que, se o balanço de pagamentos for 0, então $M_1 = X_1$ ou, de modo equivalente, $M_1 = M_2$. A regra de Cramer resulta

$$I_1^* = \frac{\det(\mathbf{A}_3)}{\det(\mathbf{A})} = \frac{4}{0{,}04} = 100$$