GABARITO - Lista 8

1- a) T:$IR^2 \to IR^2$ tal que $T(x,y)=(2x+y,x+3y)$

Prova. Sejam (x, y) e (z, w) vetores do $\Re^2$.

$T((x,y)+(z,w)) = T(x+z,y+w) = (2(x+z)+(y+w),(x+z)+3(y+w)) =$

$= ((2x+y)+(2z+w),(x+3y)+(z+3w)) =$

$= ((2x+y),(x+3y)) + ((2z+w),(z+3w)) = T(x,y)+T(z,w).$

$T(\alpha(x,y)) = T(\alpha x,\alpha y) = (2\alpha x+\alpha y,\alpha x+3\alpha y) = (\alpha(2x+y),\alpha(x+3y)) =$

$= \alpha(2x+y,x+3y) = \alpha T(x,y).$

b) T:$IR^2 \to IR^3$ tal que $T(x,y)=(x+y,x-y,x)$

Prova. Sejam (x, y) e (z, w) vetores do $\Re^2$.

$T((x,y)+(z,w)) = T(x+z,y+w) = ((x+z)+(y+w),(x+z)-(y+w),x+z) =$

$= ((x+y)+(z+w),(x-y)+(z-w),x+z) =$

$= ((x+y),(x-y),x) + ((z+w),(z-w),z) = T(x,y)+T(z,w).$

$T(\alpha(x,y)) = T(\alpha x,\alpha y) = (\alpha x+\alpha y,\alpha x-\alpha y,\alpha x) = (\alpha(x+y),\alpha(x-y),\alpha x) =$

$= \alpha(x+y,x-y,x) = \alpha T(x,y).$

c) T:$IR^3 \to IR^2$ tal que $T(x,y,z)=(2x+y-z,x+2y)$

Prova. Sejam (x, y,z) e (a, b,c) vetores do $\Re^3$.

$T((x,y,z)+(a,b,c)) =$

$T(x+a,y+b,z+c) = (2(x+a)+(y+b)-(z+c),(x+a)+2(y+b)) =$

$= ((2x+y-z)+(2a+b-c),(x+2y)+(a+2b)) =$

$= ((2x+y-z),(x+2y)) + ((2a+b-c),(a+2b)) = T(x,y,z)+T(a,b,c).$

$T(\alpha(x,y,z)) = T(\alpha x,\alpha y,\alpha z) = (2\alpha x+\alpha y-\alpha z,\alpha x+2\alpha y) = (\alpha(2x+y-z),\alpha(x+2y)) =$

$= \alpha(2x+y-z,x+2y) = \alpha T(x,y,z).$

3- Se (x,y) $\in \Re^2$, $(x,y)=a(-1,1)+b(0,1)$

$$\begin{cases} a=-x \\ a+b=y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-x \\ b=x+y \end{cases} \Rightarrow (x,y)=-x(-1,1)+(x+y)(0,1)$$

$T(x,y) = -xT(-1,1)+(x+y)T(0,1) = (-x(3,2,1)+(x+y)(1,1,0) = (-2x+y,-x+y,-x)$

Logo, fazendo $(-2x+y,-x+y,-x)=(5,3,2)$

$$\begin{cases} -2x+y=5 \\ -x+y=3 \\ -x=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases}$$. Daí, v=(-2,1).

4- a) $T(x_1,x_2,x_3)=(300x_1+500x_2+800x_3,40x_1+50x_2+60x_3)$

b) $y_1=300x_1+500x_2+800x_3$ gramas de papel e $y_2=40x_1+50x_2+60x_3$ gramas de tela

5- a) (2,1) ϵ N(T)? NÃO (3,3) ϵ N(T)? SIM

6- a) (1,2) ϵ Im(T)? SIM (6,3) ϵ Im(T)? NÃO

7) a) sim, verifique que $T(-4x^2+2x-2)=0$ b) não c){2x^2-x+1} é uma base de N(T) , dim N(T)=1 d) não é injetora e){x, 1} é uma base de Im(T), dim N(T)=2 f) não é sobrejetora

8) a) $N(T)=\left\{\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\right\}$, de modo que N(T) não tem base, dim N(T)=0.

b) T é injetora pois $N(T)=\left\{\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\right\}$, c) $\mathrm{Im}(T)=\left\{\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix}\right\}$, dim Im(T)=4

d) T é sobrejetora

9- a) $[T]_B^A=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&0\\0&-1&0\end{bmatrix}$ b) $[v]_A=(3,-3,-2)$ então $[T(v)]_B=(1,3)$

10 - a) T(x,y,z)=(x+y+z, x+2y +3z)

b) $[T]_B^A=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&3\end{bmatrix}$, é claro que $[T]_B^A$=M usada na definição de T pois A e B são as bases canônicas de IR^3 e IR^2.

11- a) $[T_1]_B^A=\begin{bmatrix}1&2\\2&-1\\1&0\end{bmatrix}$, $[T_2]_B^A=\begin{bmatrix}-1&0\\0&1\\1&1\end{bmatrix}$

b) use que $[T_1+T_2]_B^A=[T_1]_B^A+[T_2]_B^A=\begin{bmatrix}0&2\\2&0\\2&1\end{bmatrix}$

c) use que $[3T_1-2T_2]_B^A=3[T_1]_B^A-2[T_2]_B^A=\begin{bmatrix}5&6\\6&-5\\1&-2\end{bmatrix}$

12- a) $[I]_B^A=\begin{bmatrix}1&2\\1&1\end{bmatrix}$ b) a) $[v]_B=[I]_B^A[v]_A$