GAN00140 – Álgebra Linear – 2018.1 – Profª. Ana Maria Luz F. do Amaral

<u>Resultados sobre invertibilidade de matrizes diagonais, triangulares e simétricas</u>

1) Uma matriz diagonal D (n por n)

$$D=\begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{bmatrix}$$

é invertível se, e somente se, todas suas entradas na diagonal são não nulas e sua inversa é:

$$D^{-1}=\begin{bmatrix} 1/d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/d_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1/d_n \end{bmatrix}.$$

(Para provar este resultado basta verificar que $D.D^{-1}=D^{-1}.D=I_n$)

2) Seja $D^k=D.D...D$ (k vezes o produto de D), onde D é uma matriz diagonal D (n por n) então

$$\left(D^k\right)^{-1}=D^{-k}=\begin{bmatrix} 1/d_1{}^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/d_2{}^k & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1/d_n{}^k \end{bmatrix},$$

A matriz D^k é dada por:

$$D^k=\begin{bmatrix} d_1{}^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2{}^k & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & d_n{}^k \end{bmatrix}.$$

3) Uma matriz triangular é invertível se, e somente se, suas entradas na diagonal principal são todas não-nulas.

4) A inversa de uma matriz triangular inferior é triangular inferior e a inversa de uma matriz triangular superior é triangular superior.

Exemplo: $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, T é triangular superior (a_{ij}=0 para i>j) e

entradas na diagonal principal não nulas

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

5) Se A é uma matriz simétrica invertível então A^{-1} é simétrica.

<u>Prova:</u> Se A simétrica então $A=A^T$. Sabemos que $(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}=(A)^{-1}$. Logo A^{-1} é simétrica.■

6) Se A é uma matriz invertível então AA^T e A^TA são também invertíveis.
(Como A é invertível temos que A^T é invertível e o produto de matrizes invertíveis é também invertível).