GABARITO

Universidade Federal Fluminense — Instituto de Matemática

# P2 de Álgebra Linear – Turma E1 – 2018/1 – Profa Ana Maria Luz F. Amaral

**ATENÇÃO:** Justifique suas respostas. Você também será avaliado pela clareza e pela precisão da linguagem utilizada.

1. (3,0 pts) Seja

$$A=\begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & k \end{bmatrix}.$$

Determine se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas justificando sua resposta:

1,0 a) ( V ) Se $k \neq 0$ e $k \neq -1$ então o sistema **Ax=b** tem solução única, onde $x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ e $b=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$.

1.0 b) ( F ) Para todo k, $v=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ k-1 \end{bmatrix}$ é autovetor associado ao autovalor k.

c) ( V ) Se $k=1$, então A é diagonalizável.

1.0 2. (1,5 pt) Seja T:$IR^3 \rightarrow P_2(IR)$ a transformação linear definida por — Parecido Q7 lista 8

$$T(a,b,c)=(a-c)x^2+(2a-b+3c)x+c$$

0,6 a) Encontre N(T)? Qual a dimensão de N(T)? T é injetora?

0,6 b) Encontre uma base para Im(T)? Qual a dimensão de Im(T)? T é sobrejetora?

0,3 c) T é inversível?

3. (1,5 pt) Considere o operador linear T :$IR^3 \rightarrow IR^3$ definido por: — Q10 lista 9

$$T(1, 1, 1) = (1, 0, 0),\ T(-2, 1, 0) = (0, -1, 0) \text{ e } T(-1, -3, -2) = (0, 1, -1).$$

Obtenha $T(x,y,z)$. (0,7) Verifique se T é invertível, (0,3) e, em caso afirmativo, determine $T^{-1}(x, y, z)$. (0,5)

4. (1,0 pt) Sabendo que $[I]_B^A=\begin{bmatrix} -7 & 6 \\ -11 & 8 \end{bmatrix}$ e A={(1, 3), (2, -4)} determine a base B. — Q13 lista 9

5. (3,0 pts) Considere a matriz $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

item c parecido questões lista 10

esta equação foi estudada em aula

0,6 a) Determine os autovalores e os autovetores de A;

0,5 b) Encontre uma matriz P que diagonaliza A, ortogonalmente.

0,4 c) Verifique se P representa uma rotação;

1,5 d) Usando os resultados dos itens anteriores obtenha a equação reduzida e esboce a cônica, (represente geometricamente o que acontece com os eixos com as mudanças de coordenadas necessárias para obtenção da equação reduzida)

$$2x^2+2xy+2y^2+7\sqrt{2}\ x+5\sqrt{2}\ y+10=0$$

BOA PROVA!!!

GABARITO P2 ALG LIN 2018 1

1 (3,0 pts)

$$A = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & k \end{bmatrix}$$

(1.0) (a) (V) Se $k \neq 0$ e $k \neq -1$ então o sistema $Ax = b$ tem solução única onde $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$

Verdadeiro Pois para $AX = b$ ter única solução devemos ter $\det A \neq 0$

$|A| = -k^2 - k = -k(k+1)$

Se $k \neq 0$ e $k \neq -1$ então $\det(A) \neq 0$

(1,0) (b) (F) Para todo $k$, $v = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ k-1 \end{bmatrix}$ é autovetor associado ao autovalor $k$

Falso Primeiro verificamos que $k$ é autovalor

$$\det(A - kI) = \begin{vmatrix} k-k & 0 & 0 \\ 0 & -1-k & 1 \\ 0 & 1 & k-k \end{vmatrix} = 0$$

Logo $k$ é autovalor. Vamos verificar se o vetor dado no item é autovetor associado a $\lambda = k$. Caso afirmativo é solução do sistema homogêneo $(A - kI)v = 0$

②

$$(A-kI)v = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1-k & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ k-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1+k+k-1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 2k \\ 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ se } k \neq 0$$

Logo $v$ não é autovetor.

(1,0) (c) (V) Se $k=1$ então $A$ é diagonalizável

Verdadeiro. Se $k=1$

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda) \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\left[(-1-\lambda)(1-\lambda)-1\right]$$

$$= (1-\lambda)\left[-1+\cancel{\lambda}-\cancel{\lambda}+\lambda^2-1\right]$$

$$= (1-\lambda)\left[\lambda^2-2\right]$$

Logo $\lambda = 1$, $\lambda = -\sqrt{2}$ e $\lambda = \sqrt{2}$ são autovalores

Como $A$ possui todas as raízes do seu polinômio característico reais e distintas os respectivos autovetores associados são distintos e L.I, então existe uma base de autovetores na qual a representação de $A$ será uma matriz diagonal

2 (1,5 pt) $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow P_2(\mathbb{R})$

$T(a,b,c) = (a-c)x^2 + (2a-b+3c)x + c$

0,6 a) $N(T) = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 ; \; T(a,b,c) = 0x^2 + 0x + 0\}$

Assim, um vetor $(a,b,c)$ está no núcleo se

$(a-c)x^2 + (2a-b+3c)x + c = 0x^2 + 0x + 0$

$a - c = 0$ $\quad a = c \Rightarrow a = 0$

$2a - b + 3c = 0$ $\quad \Rightarrow \quad b = 2a + 3c = 0$

$c = 0$

Portanto $N(T) = \{0x^2 + 0x + 0\}$ mostrando que $T$ é injetora.

Como $N(T)$ tem somente o vetor nulo de $P_2(\mathbb{R})$ que é LD temos que $\dim N(T) = 0$

0,6 b) Pelo Teorema do Núcleo e Imagem

$\dim Im(T) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim N(T)$

Logo $\dim Im(T) = 3$

Observe que como $Im(T) \subseteq P_2(\mathbb{R})$ e $\dim Im(t) = 3 = \dim P_2(\mathbb{R})$ temos que $T$ é sobrejetora. Logo a base canônica de $P_2(\mathbb{R})$ é uma base para $Im(T) = P_2(\mathbb{R})$

$B = \{x^2, x, 1\}$

0,3 c) Sim pois $T$ é injetora e sobrejetora logo é inversível

(4)

Questão 3. $T(1,1,1) = (1,0,0)$, $T(-2,1,0) = (0,-1,0)$

$T(-1,-3,-2) = (0,1,-1)$

$B = \{(1,1,1), (-2,1,0), (-1,-3,-2)\}$ é L.I

De fato

$\alpha_1(1,1,1) + \alpha_2(-2,1,0) + \alpha_3(-1,-3,-2) = (0,0,0)$

$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ pois

$$\det\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} = -2 + 6 + 1 - 4 = 1 \neq 0$$

Logo $B$ é base do $\mathbb{R}^3$

$B' = \{(1,0,0), (0,-1,0), (0,1,-1)\}$ também é LI pois

$\beta_1(1,0,0) + \beta_2(0,-1,0) + \beta_3(0,1,-1) = (0,0,0)$

$\Rightarrow \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$ pois

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = 1 \neq 0$$

Logo $B'$ também é base do $\mathbb{R}^3$.

Como $B$ é base temos que

$(x,y,z) = k_1(1,1,1) + k_2(-2,1,0) + k_3(-1,-3,-2)$

$T(x,y,z) = k_1 T(1,1,1) + k_2 T(-2,1,0) + k_3 T(-1,-3,-2)$

$x = k_1 - 2k_2 - k_3$

$y = k_1 + k_2 - 3k_3$

$z = k_1 - 2k_3$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & x \\ 1 & 1 & -3 & y \\ 1 & 0 & -2 & z \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & x \\ 0 & 3 & -2 & y-x \\ 0 & 2 & -1 & z-x \end{array}\right] \begin{array}{l} L_2 \leftarrow 2L_2 \\ L_3 \leftarrow 3L_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & x \\ 0 & 6 & -4 & 2y-2x \\ 0 & 6 & -3 & 3z-3x \end{array}\right]$$

$L_3 \leftarrow L_3 - L_2$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & x \\ 0 & 6 & -4 & 2y-2x \\ 0 & 0 & 1 & 3z-3x-2y+2x \end{array}\right] \Rightarrow$$

$k_3 = 3z - x - 2y$

$\Rightarrow 6k_2 - 4k_3 = 2y - 2x$

$6k_2 = 4(3z - x - 2y) + 2y - 2x$

$6k_2 = 12z - 4x - 8y + 2y - 2x$

$6k_2 = 12z - 6x - 6y \Rightarrow k_2 = 2z - x - y$

$k_1 = x + 2k_2 + k_3$

$k_1 = x + 2(2z - x - y) + 3z - x - 2y$

$= \cancel{x} + 4z - 2x - 2y + 3z - \cancel{x} - 2y$

$k_1 = 7z - 2x - 4y$

0,7

$T(x,y,z) = (7z-2x-4y)(1,0,0) + (2z-x-y)(0,-1,0) +$
$+ (3z-x-2y)(0,1,-1)$

$T(x,y,z) = (7z-2x-4y, -2z+\cancel{x}+y+3z-\cancel{x}-2y, -3z+x+2y)$

$T(x,y,z) = (7z-2x-4y, z-y, -3z+x+2y)$

0,3

$[T] = \begin{bmatrix} -2 & -4 & 7 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \det([T]) = 1 \neq 0$

T é inversível!

⑥

Vamos calcular $T^{-1}(x,y,z)$ expressando $(x,y,z)$ em relação a B'

0,5

$(x,y,z) = x(1,0,0) + (-y-z)(0,-1,0) + (-z)(0,1,-1)$

logo

$T^{-1}(x,y,z) = xT^{-1}(1,0,0) + (-y-z)T^{-1}(0,-1,0) + (-z)T^{-1}(0,1,-1)$

$= x(1,1,1) + (-y-z)(-2,1,0) + (-z)(-1,-3,-2)$

$T^{-1}(x,y,z) = (x+2y+3z,\ x-y+2z,\ x+2z)$

④ $A = \{(1,3),(2,-4)\}$  $B = ?$

(1.0)

Suponho $B = \{(a,b),(c,d)\}$

$$[I]^A_B = \begin{bmatrix} -7 & 6 \\ -11 & 8 \end{bmatrix}$$

$(1,3) = -7(a,b) - 11(c,d)$

$(2,-4) = 6(a,b) + 8(c,d)$

$1 = -7a - 11c$ $(\times 6)$  $3 = -7b - 11d$ $(\times 6)$

$2 = 6a + 8c$ $(\times 7)$  $-4 = 6b + 8d$ $(\times 7)$

$6 = -42a - 66c$

$14 = 42a + 56c$

$20 = -10c \Rightarrow \boxed{c = -2}$

$1 = -7a + 22$

$7a = 21$

$\boxed{a = 3}$

$18 = -42b - 66d$

$-28 = 42b + 56d$

$-10 = -10d \Rightarrow \boxed{d = 1}$

$3 = -7b - 11$

$7b = -11 - 3$

$\boxed{b = -2}$

$B = \{(3,-2),(-2,1)\}$

Scanned by CamScanner

(7)

(5) (3,0 pts) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1$$

$$= \lambda^2 - 4\lambda + 4 - 1$$

$$= \lambda^2 - 4\lambda + 3$$

$$\lambda = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2}$$

$$\lambda = \frac{4 \pm 2}{2} \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$$

autovalores distintos mesmo sinal $\Rightarrow$ genero elíptico

Para $\lambda_1 = 1$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} 2x + y = x \\ x + 2y = y \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x = -y \\ y = -x \end{array}$$

$(x, -x)$, $x \in \mathbb{R}^*$ são autovetores associados a $\lambda_1 = 1$

$(1, -1)$ é um autovetor $\Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$ tb é

Para $\lambda_2 = 3$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} 2x + y = 3x \\ x + 2y = 3y \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} -x = -y \\ x = y \end{array}$$

$(x, x)$, $x \in \mathbb{R}^*$ são autovetores associados a $\lambda_2 = 3$

$(1, 1)$ é um autovetor $\Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ tb é

(3)

b) $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ diagonaliza A ortogonalmente

$\det P = 1$

Colunas de P são ortonormais (matriz de mudança de base da base de autovetores p/ canônica)

c) Considerando-se que a matriz de rotação é da forma

$$R = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

P representa rotação de $-45°$ ou $-\pi/4$

Observe que P rotaciona os eixos $\tilde{x}O\tilde{y}$ (coordenadas em relação base de autovetores) para $xOy$ (coordenadas em relação a base canônica)

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix} \Rightarrow P^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix}$$

$P^{-1} = P^T$ rotaciona os eixos $xOy$ (coordenadas em relação a base canônica) para $\tilde{x}O\tilde{y}$ (coordenadas em relação a base de autovetores)

$P^{-1}$ representa rotação de $45°$ ou $\pi/4$

9

5.

1,2

$$2x^2+2xy+2y^2+7\sqrt{2}\,x+5\sqrt{2}\,y+10=0$$

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 7\sqrt{2} & 5\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 10 \end{bmatrix}=0$$

0,3

$$\begin{bmatrix} \tilde{x} & \tilde{y} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 7\sqrt{2} & 5\sqrt{2} \end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}}_{P}\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 10 \end{bmatrix}=0$$

$$\tilde{x}^2+3\tilde{y}^2+(7-5)\tilde{x}+(7+5)\tilde{y}+10=0$$ 0,3

$$\tilde{x}^2+2\tilde{x}+3\tilde{y}^2+12\tilde{y}+10=0$$

translandando eixos

0,3

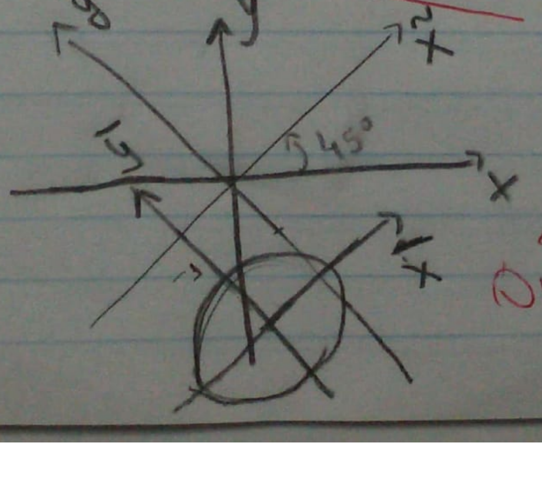
$$\tilde{x}^2+2\tilde{x}+1+3(\tilde{y}^2+4\tilde{y}+4)+10=1+12$$

$$(\tilde{x}+1)^2+3(\tilde{y}+2)^2=13-10$$

$$\frac{(\tilde{x}+1)^2}{3}+\frac{(\tilde{y}+2)^2}{1}=1$$

Fazendo $\bar{x}=\tilde{x}+1$ e $\bar{y}=\tilde{y}+2$ 0,3

$\frac{\bar{x}^2}{3}+\frac{\tilde{y}^2}{1}=1$ que é a equação da elipse nos eixos $\bar{x}O\bar{y}$




0,3