GAN00140 – Álgebra Linear -G1– 2018.2 - Profa. Ana Maria Luz F. Amaral
GAN00007 – Introdução à Álgebra Linear -B1– 2018.2

Lista 2 - Resolução

1. Verifique se os produtos abaixo estão bem definidos e, em caso afirmativo, calcule-os.

a) $\begin{bmatrix}1 & 1/3 & -2\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}2\\-1/2\\2\end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix}1\\-1/2\\1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1 & 1/2 & -1\end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}0 & 2\\-3 & 5\end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}$

Solução.

a) A ordem da primeira matriz é 1x3 e a da segunda é 3x1, logo o produto está bem definido e terá ordem 1x1:

$\begin{bmatrix}1 & 1/3 & -2\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}2\\-1/2\\2\end{bmatrix}$ = [1.2 + 1/3.(-1/2) + (-2).2] = [-13/6]

b) A ordem da primeira matriz é 3x1 e a da segunda é 1x3, logo o produto está bem definido e terá ordem 3x3:

$$\begin{bmatrix}1\\-1/2\\1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1 & 1/2 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1/2 & -1\\-1/2 & -1/4 & 1/2\\1 & 1/2 & -1\end{bmatrix}$$

c) A ordem da primeira matriz é 2x1 e a da segunda é 2x2, logo o produto matricial não está definido, pois o número de colunas da primeira não coincide com o número de linhas da segunda.

d) A ordem da primeira matriz é 2x2 e a da segunda é 2x1, logo o produto matricial está bem definido e terá ordem 2x1.

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\-2\end{bmatrix}$$

2. Uma matriz quadrada A se diz simétrica se $A^T = A$ e anti-simétrica se $A^T = -A$.

   (a) Mostre que a soma de duas matrizes simétricas é também simétrica e que o mesmo ocorre para matrizes anti-simétricas.

   (b) O produto de duas matrizes simétricas de ordem n é também uma matriz simétrica? Justifique sua resposta.

Solução.

(a) Sejam A e B duas matrizes simétricas. Desse modo $A^T = A$ e $B^T = B$.

$(A + B)^T = A^T + B^T = A + B$, logo A + B é simétrica.

Analogamente, sejam A e B matrizes anti-simétricas de ordem n, isto é, $A^T = - A$ e $B^T = - B$. Temos $(A + B)^T = A^T + B^T = - A + (- B) = - (A+B)$, logo A + B é uma matriz anti-simétrica de ordem n.

(b) Não. Lembre-se que para mostrar que uma propriedade não é válida, basta exibir um contra exemplo. Assim, considere as seguintes matrizes simétricas:

$\begin{pmatrix}1 & 2\\2 & -1\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}-1 & 3\\3 & 1\end{pmatrix}$. O produto delas resulta em $\begin{pmatrix}1 & 2\\2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 3\\3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 5\\-5 & 5\end{pmatrix}$ que não é simétrica.

3. Determine números reais a e b para que a matriz $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & a-b \\ a+b & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ seja simétrica.

Solução.
Para que A seja simétrica, devemos ter A = A^T.

$A^T = \begin{pmatrix} 1 & a+b & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ a-b & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Assim, igualando A e A^T:

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & a-b \\ a+b & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+b & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ a-b & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Daí, $\begin{cases} a+b=2 \\ a-b=1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} a = 3/2 \\ b = 1/2 \end{cases}$.

4.

a) Verifique que as matrizes da forma X $= \pm\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & -1 \end{pmatrix}, c \in \Re$, satisfazem a igualdade $X^2 = I$, onde I é a matriz identidade de ordem 2. Dizemos que as matrizes da forma X são raízes quadradas da matriz identidade I.

b) Determine todas as raízes quadradas da matriz identidade I de ordem 2.

Solução.

a) Calculando X^2, temos $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \forall\, c \in \Re$.

b)
Solução 1.
Precisamos determinar A tal que $A^2 = I$.

Seja A = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, a,b,c,d $\in \Re$. $A^2 = AA = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Assim, temos que resolver o sistema de equações:

$$\begin{cases} a^2+bc=1 \\ ab+bd=0 \\ ac+cd=0 \\ bc+d^2=1 \end{cases} ou \begin{cases} a^2+bc=1 \\ b(a+d)=0 \\ c(a+d)=0 \\ bc+d^2=1 \end{cases}.$$

Esse sistema não é linear, não podemos resolvê-lo da mesma maneira que foi feita no exercício 3. Vamos considerar quatro casos, a partir das equações 2 e 3:

- 1º caso: b = 0 e c = 0. Substituindo no sistema anterior, teremos a $= \pm 1$ e d$= \pm 1$.

Assim, deste caso, temos as soluções ± I e $\pm\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

- 2º caso: b ≠ 0 e c ≠ 0.

Para que as equações 2 e 3 sejam satisfeitas, a+d=0, o que implica em d = - a.

Da equação 1, bc = 1 – a^2, podemos fazer c = $\dfrac{1-a^2}{b}$.

Substituindo d = -a na equação 4, chegamos ao mesmo resultado.

Desse caso, temos as soluções $\pm\begin{pmatrix} a & b \\ \dfrac{1-a^2}{b} & -a \end{pmatrix}$.

- 3º caso: $b \neq 0$ e $c = 0$.

Teremos $a^2 = 1$ e $d^2 = 1$, o que nos dará $a = \pm 1$ e $d = \pm 1$.
Mas para que a equação $b(a+d) = 0$ seja satisfeita com $b \neq 0$, devemos ter $a = -d$.
Logo, as soluções desse caso são $\pm\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

- 4º caso: $b = 0$ e $c \neq 0$.

Teremos novamente $a^2 = 1$ e $d^2 = 1$, o que nos dará $a = \pm 1$ e $d = \pm 1$.
Mas para que a equação $b(a+d) = 0$ seja satisfeita com $c \neq 0$, devemos ter $a = -d$.
Desse caso, temos as soluções $\pm\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & -1 \end{pmatrix}$.

Note que as soluções $\pm\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ são contempladas nas soluções do 2º caso fazendo a=1. Portanto, as soluções serão as matrizes:

$$\boxed{\pm \mathrm{I},\ \pm\begin{pmatrix} a & b \\ \dfrac{1-a^2}{b} & -a \end{pmatrix}, b \neq 0 \ \text{e}\ \pm\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & -1 \end{pmatrix}, c \in \Re^*.}$$

Solução 2. Se $a+d = 0 \Rightarrow d = -a \Rightarrow bc + a^2 = 1 \Rightarrow$

(a) Se $b \neq 0$, teremos $c = \dfrac{1-a^2}{b}$.

Desse subcaso, resultam as soluções do tipo $\pm\begin{pmatrix} a & b \\ \dfrac{1-a^2}{b} & -a \end{pmatrix}$.

(b) Se $b = 0$, teremos $a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1$. Veja que $c \in \mathrm{IR}$.

Deste subcaso, resultam as soluções do tipo $\pm\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & -1 \end{pmatrix}$.

2º caso. Se $a+d \neq 0 \Rightarrow b=c=0 \Rightarrow a^2 = 1$ e $d^2 = 1$, o que nos dará $a = \pm 1$ e $d = \pm 1$.
Esse caso fornece as soluções do tipo $\pm$ I.
Portanto, as soluções serão as matrizes:

$$\boxed{\pm \mathrm{I},\ \pm\begin{pmatrix} a & b \\ \dfrac{1-a^2}{b} & -a \end{pmatrix}, b \neq 0 \ \text{e}\ \pm\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & -1 \end{pmatrix}, c \in \Re^*.}$$

5. Se A e B são matrizes reais de ordem 2 que comutam com a matriz $X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, isto é, $AX = XA$ e $BX = XB$. Mostre que $AB = BA$.

Solução.

Sejam $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $a,b,c,d \in \Re$ e $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$, $e,f,g,h \in \Re$, matrizes que comutam com a matriz dada no enunciado, podemos escrever:

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ ou, fazendo as multiplicações em cada membro da igualdade e igualando os resultados obtemos:

$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix}$.

Desse modo:

$$AB = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae & 0 \\ 0 & dh \end{pmatrix} = BA.$$

6. Diga se são verdadeiras ou falsas as afirmações abaixo. Caso verdadeira prove, caso contrário dê um contra-exemplo.

(a) Se AB = 0, então A = 0 ou B = 0.

(b) Se AB = 0, então B.A=0.

(c) Se pudermos efetuar o produto A.A, então A é uma matriz quadrada.

Solução.

(a) Falso. Por exemplo, sejam $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A.B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

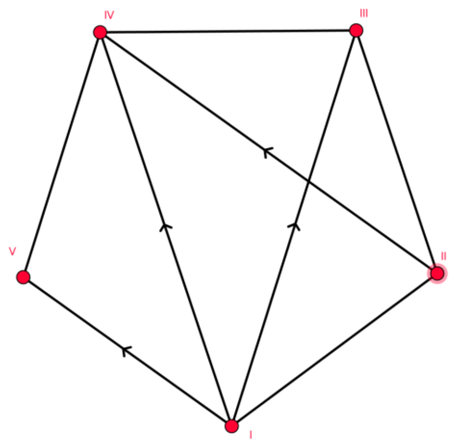
(b) Falso. Usando as mesmas matrizes A e B do item acima, temos, $A.B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, mas $BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(c) Verdadeiro, pois se A é uma matriz m x n e se podemos efetuar A x A $\Rightarrow$ m = n.

7. Uma rede de comunicação tem cinco locais com transmissores de potências distintas. Estabelecemos que $a_{ij} = 1$, na matriz abaixo significa que a estação i pode transmitir diretamente à estação j, $a_{ij} = 0$ significa que a transmissão da estação i não alcança a estação j. Observe que a diagonal principal é nula significando que uma estação não transmite diretamente para si mesma.

Apresentamos uma figura que representa as relações de transmissão entre as estações. Os pontos representam as estações e estão rotuladas com números romanos, as ligações com seta indicam a transmissão (direta) orientada no sentido estação de saída – estação de chegada e as ligações sem seta indicam que a transmissão (direta) ocorre nos dois sentidos. Como exemplo, a estação III pode transmitir diretamente à estação IV e vice-versa. Já a estação II pode transmitir diretamente à estação IV, porém a estação IV não pode transmitir diretamente à estação II.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



Qual seria o significado da matriz A^2 = A.A?

Seja $A^2 = [c_{ij}]$. Calculemos o elemento $c_{42} = \sum a_{4k}a_{k2} = 0+0+1+0+0 = 1$.

Note que a única parcela não nula veio de $a_{43} \cdot a_{32} = 1.1$. Isto significa que a estação IV transmite para a estação II através de uma retransmissão pela estação III (veja a figura), embora não exista uma transmissão direta de IV para II.

a) Calcule A^2.
b) Qual o significado de $c_{13} = 2$?
c) Discuta o significado dos termos nulos, iguais a 1 e maiores que 1 de modo a justificar a afirmação: "A matriz A^2 representa o número de caminhos disponíveis para se ir de uma estação a outra com uma única retransmissão".
d) Qual o significado das matrizes $A + A^2$, A^3 e $A + A^2 + A^3$?
e) Se A fosse simétrica, o que significaria?

Solução.

a) $$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) $c_{13} = 2$ e significa que a estação I transmite para estação III através de uma terceira de dois modos (através da estação II e da estação IV).

c) Cada elemento de A^2 representa o número de modos que uma estação transmite para uma outra através de uma terceira estação.

d) Cada elemento de $A + A^2$ representa a soma do número de modos que uma estação transmite para outra, diretamente e através de uma terceira para uma outra.

Veja: $$A + A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

O elemento a_{14} indica que há 4 maneiras de se transmitir da estação I à estação IV:
Diretamente: I $\rightarrow$ IV; Através de uma terceira: I $\rightarrow$ V $\rightarrow$ IV, I $\rightarrow$ II $\rightarrow$ IV e I $\rightarrow$ III $\rightarrow$ IV.

Cada elemento de A^3 representa o número de modos que uma estação transmite para uma outra através de uma quarta estação.

Veja: $$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 5 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 6 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

O elemento a_{25} indica que há 2 maneiras de se transmitir da estação I para a estação II através de uma quarta estação: II $\rightarrow$ III $\rightarrow$ IV $\rightarrow$ V e II $\rightarrow$ I $\rightarrow$ IV $\rightarrow$ V.

Cada elemento de $A+A^2+A^3$ representa a soma do número de modos que uma estação transmite para outra estação, diretamente, através de uma terceira e de uma quarta.

$$A+A^2+A^3=\begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 & 9 & 6 \\ 3 & 4 & 7 & 9 & 4 \\ 1 & 4 & 4 & 6 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Veja:

Experimente listar as maneiras de se transmitir da estação III para a estação V considerando transmissões diretas, através de uma terceira e através de uma quarta.

e) Se A fosse simétrica, isto é, $a_{ij}=a_{ji}$, isso significaria que a estação i transmite para estação j sempre que a estação j transmitir para a i.

8.

$$A(G)=\begin{array}{c} \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Observando as linhas de $A(G)$, vemos que P_3 tem três elementos iguais a 1 na sua linha, de modo que P_3 influencia três pessoas — mais do que qualquer outro membro do grupo. Portanto, P_3 deve ser o líder do grupo. Por outro lado, P_5 não influencia ninguém.