GAN00140 – Álgebra Linear -G1– 2018.2 - Profa. Ana Maria Luz F. Amaral
GAN00007 – Introdução à Álgebra Linear -B1– 2018.2

Lista 2

1. Verifique se os produtos abaixo estão bem definidos e, em caso afirmativo, calcule-os.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 1/3 & -2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 \\ -1/2 \\ 2 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & -1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

2. Uma matriz quadrada A se diz simétrica se $A^T = A$ e anti-simétrica se $A^T = -A$.

(a) Mostre que a soma de duas matrizes simétricas é também simétrica e que o mesmo ocorre para matrizes anti-simétricas.
(b) O produto de duas matrizes simétricas de ordem n é também uma matriz simétrica? Justifique sua resposta.

3. Determine números reais a e b para que a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & a-b \\ a+b & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ seja simétrica.

4. a) Verifique que as matrizes da forma $X = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & -1 \end{pmatrix}, c \in \Re$, satisfazem a igualdade $X^2 = I$, onde I é a matriz identidade de ordem 2. Dizemos que as matrizes da forma X são raízes quadradas da matriz identidade I.
b) Determine todas as raízes quadradas da matriz identidade I de ordem 2.

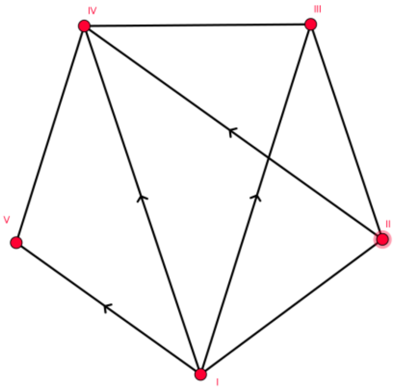
5. Se A e B são matrizes reais de ordem 2 que comutam com a matriz
$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, isto é, AX = XA e BX = XB. Mostre que AB = BA.

6. Diga se são verdadeiras ou falsas as afirmações abaixo. Caso verdadeira prove, caso contrário dê um contra-exemplo.
(a) Se AB = 0, então A = 0 ou B = 0.
(b) Se AB = 0, então B.A=0.
(c) Se pudermos efetuar o produto A.A, então A é uma matriz quadrada.

7. Uma rede de comunicação tem cinco locais com transmissores de potências distintas. Estabelecemos que $a_{ij} = 1$, na matriz abaixo significa que a estação i pode transmitir diretamente à estação j, $a_{ij} = 0$ significa que a transmissão da estação i não alcança a estação j. Observe que a diagonal principal é nula significando que uma estação não transmite diretamente para si mesma.

Apresentamos uma figura que representa as relações de transmissão entre as estações. Os pontos representam as estações e estão rotuladas com números romanos, as ligações com seta indicam a transmissão (direta) orientada no sentido estação de saída – estação de chegada e as ligações sem seta indicam que a transmissão (direta) ocorre nos dois sentidos. Como exemplo, a estação III pode transmitir diretamente à estação IV e vice-versa. Já a estação II pode transmitir diretamente à estação IV, porém a estação IV não pode transmitir diretamente à estação II.

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



Qual seria o significado da matriz $A^2 = A.A$?

Seja $A^2 = [c_{ij}]$. Calculemos o elemento

$$c_{42} = \sum a_{4k} a_{k2} = 0+0+1+0+0 = 1.$$

Note que a única parcela não nula veio de $a_{43} \cdot a_{32} = 1.1$. Isto significa que a estação IV transmite para a estação II através de uma retransmissão pela estação III (veja a figura), embora não exista uma transmissão direta de IV para II.

a) Calcule A^2.

b) Qual o significado de $c_{13} = 2$?

c) Discuta o significado dos termos nulos, iguais a 1 e maiores que 1 de modo a justificar a afirmação: "A matriz A^2 representa o número de caminhos disponíveis para se ir de uma estação a outra com uma única retransmissão".

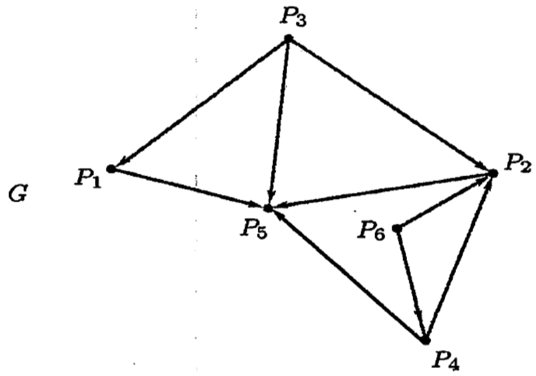
d) Qual o significado das matrizes $A + A^2$, A^3 e $A + A^2 + A^3$?

e) Se A fosse simétrica, o que significaria?

8- Um grupo de seis indivíduos se reúne, já algum tempo, em sessões de terapia de grupo. O terapeuta, que não é parte do grupo, traçou o grafo direcionado ao lado para descrever as relações de influência entre os membros do grupo. Leia as notas abaixo sobre grafos direcionados e modelos em Sociologia e Telecomunicações. Escreva a matriz de adjacência de G e responda:

a) Quem influencia mais pessoas?

b) Quem não influencia ninguém?



Digrafos

Um **grafo direcionado**, ou **digrafo**, é uma coleção finita de pontos chamados **vértices** ou **nós** e uma coleção finita de **arestas orientadas**, cada uma das quais ligando um par ordenado de vértices distintos. Portanto, um digrafo não contém laços. Vamos supor, também, que não existem arestas múltiplas. Observe que a aresta orientada P_iP_j é diferente da aresta orientada P_jP_i. A matriz $A(G)$, cujo (i, j)-ésimo elemento é 1 se existe uma aresta orientada ligando P_i a P_j e igual a zero caso contrário, é a **matriz de adjacência** de G. A matriz de adjacência de um digrafo não é necessariamente simétrica.

Modelos em Sociologia e Telecomunicações

Considere n indivíduos, $P_1, P_2, \ldots, P_n$, alguns dos quais estão relacionados entre si. Suponha que nenhum deles está associado a si próprio. Apresentamos abaixo alguns exemplos deste tipo de relação.

1. P_i tem acesso a P_j. Nesse caso, P_j pode ou não ter acesso a P_i. Por exemplo, muitos telefones de emergência em estradas permitem que um motorista em dificuldades entre em contato com um posto de socorro, mas não permitem que o posto se comunique com o viajante. Esse modelo pode ser representado por um digrafo da seguinte forma. Sejam $P_1, P_2, \ldots, P_n$ os vértices de G. Ligue P_i a P_j por meio de uma aresta orientada se P_i tem acesso a P_j. É importante ter em mente que essa relação não é necessariamente transitiva, isto é, P_i pode ter acesso a P_j e P_j pode ter acesso a P_k sem que P_i tenha acesso a P_k.
2. P_i influencia P_j. Essa situação é idêntica àquela descrita em 1: se P_i influencia P_j, P_j pode ou não influenciar P_i.
3. Dado um par qualquer de indivíduos, P_i e P_j, então ou P_i domina P_j ou P_j domina P_i, mas não ambos. Essa situação é representada por um grafo direcionado completo com n vértices. Tais grafos são muitas vezes denominados **digrafos de dominação**.