

1- Prove o teorema abaixo

Teorema (Pitágoras)

Seja V um espaço com produto interno e $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$. Então, se $x \perp y$, temos

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

2-

Seja $W = \{(2x, y, x-y), x, y \text{ pertencente a } \mathbb{R}\}$

- (a) Encontre uma base ortonormal para W (utilize processo de *Gram-Schmidt*).
- (b) Considerando o produto interno usual no \mathbb{R}^3 , determine o complemento ortogonal W^\perp do subespaço W

3-

Calcule o valor de m para que a matriz abaixo não tenha inversa (Use expansão por cofatores).

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ m & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

4- Seja $B = \begin{bmatrix} a & 2 & 13 & 5 \\ 0 & b & 4 & 6 \\ 0 & 0 & c & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Sabendo que $\det(B) = 24$ e que $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 6 \end{bmatrix}$. Determine os valores de a ,

b e c .

5-

Considere o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + 2y - z = -4 \\ x + 3z = a \end{cases}$$

- (a) Seja A a matriz de coeficientes do sistema acima, através de operações elementares (método da triangulação) obtenha $\det(A)$.

b) Abaixo temos o nosso Teorema * trabalhado em sala acrescido de mais equivalências considerando outros tópicos que trabalhamos no curso. Leia as equivalências:

Teorema 6.4.5 **Afirmações Equivalentes**

Se A é uma matriz $n \times n$ então as seguintes afirmações são equivalentes.

- (a) A é invertível.
- (b) $Ax = \mathbf{0}$ admite somente a solução trivial.
- (c) A forma escalonada reduzida por linhas de A é I_n .
- (d) A pode ser escrita como um produto de matrizes elementares.
- (e) $Ax = b$ é consistente para cada matriz b de tamanho $n \times 1$.
- (f) $Ax = b$ tem exatamente uma solução para cada matriz b de tamanho $n \times 1$.
- (g) $\det(A) \neq 0$.
- (h) ~~Imagem de A é \mathbb{R}^n~~ (ainda não falamos)
- (i) ~~A é injetiva.~~
- (j) Os vetores-coluna de A são linearmente independentes.
- (k) Os vetores-linha de A são linearmente independentes.
- (l) Os vetores-coluna de A geram o \mathbb{R}^n .
- (m) Os vetores-linha de A geram o \mathbb{R}^n .
- (n) Os vetores-coluna de A formam uma base do \mathbb{R}^n .
- (o) Os vetores-linha de A formam uma base do \mathbb{R}^n .
- (p) A tem posto n .
- (q) A tem nulidade 0 .
- (r) O complemento ortogonal do espaço-nulo de A é o \mathbb{R}^n .
- (s) O complemento ortogonal do espaço-linha de A é $\{\mathbf{0}\}$.
- (t) $A^T A$ é invertível.

Com base na sua resposta do item a) e no Teorema acima, julgue se as afirmativas abaixo são verdadeiras ou falsas.

b1) Os vetores-linha de A forma uma base do \mathbb{R}^3 . ()

b2) A tem posto 2. ()

b3) A tem nulidade 1. ()

b4) Se $a-16 \neq 0$ o sistema terá infinitas soluções. ()

b5) O sistema homogêneo associado à A tem somente a solução trivial. ()

b6) A matriz dos coeficientes A é uma matriz ortogonal. ()

b7) $\text{tr}A = \det A$ ()

c) Encontre uma base para o espaço-coluna da matriz R obtida após o escalonamento de A .

d) Encontre uma base para o espaço-coluna de A .

e) Exibindo a análise proveniente da Regra de Cramer, verifique para quais valores de a o sistema acima é consistente e considerando este(s) valor(es) exiba o conjunto solução do sistema.

6- (Q10- ANPEC 2010)

Julgue as afirmativas:

- Ⓒ $S = \{(x, y, x + y) \in \mathbb{R}^3 / x, y \in \mathbb{R}\}$ é um subespaço vetorial de \mathbb{R}^3 e a dimensão de S é 2;
- Ⓐ $\{(1,2,3), (4,5, 12), (0,8,0)\}$ é base de \mathbb{R}^3 ;
- Ⓑ Se u, v e w são vetores linearmente independentes, então $v+w, u+w$ e $u+v$ são também linearmente independentes;
- Ⓓ Se S é um subconjunto de \mathbb{R}^3 formado por vetores linearmente dependentes, então podemos afirmar que S tem 4 elementos ou mais;
- Ⓔ Se o posto da matriz $\begin{bmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ é 3, então $x \neq 1$.

7. Considere uma sociedade simples, que apresenta somente três setores da economia: Agricultura, Manufatura e Serviços. Seja a A , a matriz de troca que representa a produção e consumo nesta sociedade

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{5}{12} & \frac{1}{6} & \frac{5}{12} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Sendo p_1, p_2 e p_3 o fluxo de capital recebido por cada setor através de vendas. Qual devem ser os valores de p_1, p_2 e p_3 para que o sistema esteja em um estado de equilíbrio definido como **ninguém ganha nem perde dinheiro?**

(Dica: se $P = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}$, a solução é obtida resolvendo-se o problema: $AP = P$, isto é, $AP - P = 0$, ou ainda

$$(A - I)P = 0$$

Obtenha a resposta analisando os dados abaixo que foram inseridos no programa wxMaxima. Sabendo que $M = (A - I)$ e que o comando $\text{echelon}(M)$ retorna a forma escalonada da matriz M , como produzido através da eliminação de Gauss. A forma escalonada é calculada de M por operações elementares de linha tais que o primeiro elemento não zero em cada linha na matriz resultante seja o número um e os elementos da coluna abaixo do primeiro número um em cada linha sejam todos zero

(%i1) **A:matrix([1/2,1/2,3/12],[5/12,1/6,5/12],[1/12,1/3,1/3]);**

(A)
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{12} \\ \frac{5}{12} & \frac{1}{6} & \frac{5}{12} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

(%i2) **p:matrix([p1],[p2],[p3]);**

(p)
$$\begin{bmatrix} p1 \\ p2 \\ p3 \end{bmatrix}$$

(%i13) **M:A-ident(3);**

(M)
$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{12} \\ \frac{5}{12} & -\frac{5}{6} & \frac{5}{12} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

(%i20) **echelon(M);**

(%o20)
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(%i14) **M.p;**

(%o14)
$$\begin{bmatrix} \frac{p3}{4} + \frac{p2}{2} - \frac{p1}{2} \\ \frac{5p3}{12} - \frac{5p2}{6} + \frac{5p1}{12} \\ -\frac{2p3}{3} + \frac{p2}{3} + \frac{p1}{12} \end{bmatrix}$$

(%i15) **eq1:-(-p3/4-p2/2+p1/2)=0;**

(eq1)
$$\frac{p3}{4} + \frac{p2}{2} - \frac{p1}{2} = 0$$

(%i16) **eq2:-(-(5*p3)/12+(5*p2)/6-(5*p1)/12)=0;**

(eq2)
$$\frac{5p3}{12} - \frac{5p2}{6} + \frac{5p1}{12} = 0$$

(%i17) **eq3:-((2*p3)/3-p2/3-p1/12)=0;**

(eq3)
$$-\frac{2p3}{3} + \frac{p2}{3} + \frac{p1}{12} = 0$$

(%i19) **linsolve([eq1,eq2,eq3],[p1,p2,p3]);**

solve: dependent equations eliminated: (3)

(%o19) **[p1=2 %r3,p2=- $\frac{3}{2}$ %r3,p3=%r3]**

→