

Lista de Exercícios 7 – Revisão para a prova (GABARITO)

1- Prove o teorema abaixo

Teorema (Pitágoras)

Seja V um espaço com produto interno e $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$. Então, se $x \perp y$, temos

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

2-
$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x + y \rangle + \langle y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle$$

$$= \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

a) $(2x, y, x-y) = x(2, 0, 1) + y(0, 1, -1)$. Fazendo $v_1 = (2, 0, 1)$ e $v_2 = (0, 1, -1)$, obtemos uma base ortogonal $B = \{w_1, w_2\}$, onde $w_1 = v_1$ e $w_2 = (2/5, 1/5, -1/5)$. A base ortonormal B' será obtida dividindo cada w_i por sua norma, $B' = \{w_1/\|w_1\|, w_2/\|w_2\|\}$, onde $\|w_1\| = (5)^{1/2}$ (raiz quadrada de 5) e $\|w_2\| = (9/5)^{1/2}$.

b) O complemento ortogonal de W será $\{(-z/2, z, z), z \text{ pertencente a } \mathbb{R}\}$

3-
$$S^\perp = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (x, y, z) \perp S\} = \{(-z, -2z, z), z \in \mathbb{R}\}$$

Calcule o valor de m para que a matriz abaixo não tenha inversa (Use expansão por cofatores).

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ m & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\det A = 0 \Rightarrow A$ não é invertível
 $\det A = -4 + 2m = 0 \Rightarrow m = 2$

4- Seja $B = \begin{bmatrix} a & 2 & 13 & 5 \\ 0 & b & 4 & 6 \\ 0 & 0 & c & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Sabendo que $\det(B) = 24$ e que $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 6 \end{bmatrix}$. Determine os valores de a ,

$a = 4, b = 2$

b e c.

$\hookrightarrow \det B = a \cdot b \cdot c \cdot 1 = 24$. Substituindo os valores de a e b obtemos $c = 3$

5-

Considere o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + 2y - z = -4 \\ x + 3z = a \end{cases}$$

(a) Seja A a matriz de coeficientes do sistema acima, através de operações elementares (método da triangulação) obtenha $\det(A)$.

$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$
 $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$
 $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$
 \Rightarrow

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 6 \\ 0 & 1 & 0 & | & -10 \\ 0 & 0 & 0 & | & a-16 \end{bmatrix}$$

$\det(A') = \det A = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0$
 (este sistema ou é inconsistente ou tem infinitas sol)

b) Abaixo temos o nosso Teorema * trabalhado em sala acrescido de mais equivalências considerando outros tópicos que trabalhamos no curso. Leia as equivalências:

Teorema 6.4.5 **Afirmações Equivalentes**

Se A é uma matriz $n \times n$ então as seguintes afirmações são equivalentes.

- (a) A é invertível.
- (b) $AX = 0$ admite somente a solução trivial.
- (c) A forma escalonada reduzida por linhas de A é I_n .
- (d) A pode ser escrita como um produto de matrizes elementares.
- (e) $AX = b$ é consistente para cada matriz b de tamanho $n \times 1$.
- (f) $AX = b$ tem exatamente uma solução para cada matriz b de tamanho $n \times 1$.
- (g) $\det(A) \neq 0$.
- (h) ~~Os vetores-coluna de A são linearmente independentes.~~ (ainda não falamos)
- (i) ~~Os vetores-linha de A são linearmente independentes.~~
- (j) Os vetores-coluna de A são linearmente independentes.
- (k) Os vetores-linha de A são linearmente independentes.
- (l) Os vetores-coluna de A geram o \mathbb{R}^n .
- (m) Os vetores-linha de A geram o \mathbb{R}^n .
- (n) Os vetores-coluna de A formam uma base do \mathbb{R}^n .
- (o) Os vetores-linha de A formam uma base do \mathbb{R}^n .
- (p) A tem posto n .
- (q) A tem nulidade 0 .
- (r) O complemento ortogonal do espaço-nulo de A é o \mathbb{R}^n .
- (s) O complemento ortogonal do espaço-linha de A é $\{0\}$.
- (t) $A^T A$ é invertível.

Com base na sua resposta do item a) e no Teorema acima, julgue se as afirmativas abaixo são verdadeiras ou falsas.

b1) Os vetores-linha de A forma uma base do \mathbb{IR}^3 . (F)

b2) A tem posto 2. (V)

b3) A tem nulidade 1. (V) $N = 3 - 2 = 1$

b4) Se $a - 16 \neq 0$ o sistema terá infinitas soluções. (F) $a - 16 \neq 0$ o sistema é impossível

b5) O sistema homogêneo associado à A tem somente a solução trivial. (F) tem infinitas soluções

b6) A matriz dos coeficientes A é uma matriz ortogonal. (F) Matriz ortogonal $\rightarrow A^{-1} = A^T \Rightarrow \det(A^{-1}) = 1$ ou -1

b7) $\text{tr}A = \det A$ (F)
 $\text{tr}A = 1 + 2 + 3 = 6 \neq \det(A) (=0)$

c) Encontre uma base para o espaço-coluna da matriz R obtida após o escalonamento de A .

$$r_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, r_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad B = \{r_1, r_2\}$$

d) Encontre uma base para o espaço-coluna de A .

$$s_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, s_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad B = \{s_1, s_2\}$$

e) Exibindo a análise proveniente da Regra de Cramer, verifique para quais valores de a o sistema acima é consistente e considerando este(s) valor(es) exiba o conjunto solução do sistema.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & -1 \\ a & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\det A_1 = 48 - 3a$$

$$48 - 3a = 0$$

$$3a = 48 \quad a = 16$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ 1 & a & 3 \end{bmatrix}$$

$$\det A_2 = 2a - 32$$

$$2a - 32 = 0$$

$$a = 32/2 = 16$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & a \end{bmatrix}$$

$$\det A_3 = a - 16$$

$$a - 16 = 0$$

$$a = 16$$

Se $a=16$ $\det(A_i) = 0 \neq i$, como $\det A = 0$ o sistema é compatível e indeterminado. Se $a \neq 16$ $\det(A_i) \neq 0$ e como $\det(A) = 0$ o sistema é incompatível.
 (Q10- ANPEC 2010)

Julgue as afirmativas:

- ③ $S = \{(x, y, x+y) \in \mathbb{R}^3 / x, y \in \mathbb{R}\}$ é um subespaço vetorial de \mathbb{R}^3 e a dimensão de S é 2; (V)
- ① $\{(1,2,3), (4,5,12), (0,8,0)\}$ é base de \mathbb{R}^3 ; (F)
- ② Se u, v e w são vetores linearmente independentes, então $v+w, u+w$ e $u+v$ são também linearmente independentes; (V)
- ③ Se S é um subconjunto de \mathbb{R}^3 formado por vetores linearmente dependentes, então podemos afirmar que S tem 4 elementos ou mais; (F)
- ④ Se o posto da matriz $\begin{bmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ é 3, então $x \neq 1$. (F)

7-

(5/20) echelon(M)

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(5/20) Com base na matriz esxalonada de M obtida pelo comando echelon M temos que $p_1=2t, p_2=3t/2, p_3=t$, onde t é um número real arbitrário por exemplo escolhendo $t=1000$, vemos que $p_1=R\$1000,00, p_2=R\$1500,00$ e $p_3=R\$1000,00$

Obs: na 5 e) a expressão do conjunto solução para $a=16$ é $S=\{(16-3t, -10+2t, t), t \text{ pertencente aos Reais}\}$