Exemplo – Aula 13 no Laboratório de Informática

GAN00140 – ÁLGEBRA LINEAR -G1– 2018.2 - PROFA. ANA MARIA LUZ F. AMARAL

GAN00007 – INTRODUÇÃO À ÁLGEBRA LINEAR -B1– 2018.2

PROFA. ANA MARIA LUZ FASSARELLA DO AMARAL

EXEMPLO 1* ■ Considere uma sociedade simples, consistindo em um fazendeiro que, sozinho, produz toda a comida, um carpinteiro que constrói, sozinho, todas as casas, e um alfaiate que faz, sozinho, todas as roupas. Por conveniência, vamos selecionar nossas unidades de modo que cada indivíduo produz uma unidade de cada artigo por ano. Suponha que a proporção de cada produto consumida por cada indivíduo é dada na Tabela 8.1. Então, o fazendeiro consome $\frac{7}{16}$ de sua produção, enquanto o carpinteiro consome $\frac{5}{16}$ da produção do fazendeiro e $\frac{5}{16}$ das roupas produzidas pelo alfaiate, e assim por diante. Seja p_1 o preço por unidade de comida, p_2 o preço por unidade de casa e p_3 o preço por unidade de roupa. Vamos supor que todos pagam o mesmo preço por um artigo. Então, o fazendeiro paga o mesmo preço que o alfaiate e o carpinteiro por sua comida, embora ele mesmo produza os alimentos. Estamos interessados em determinar os preços p_1, p_2 e p_3 de modo a obter um estado de equilíbrio, definido como: *ninguém ganha nem perde dinheiro*.

Tabela 8.1

Artigos Consumidos por:	*Artigos Produzidos por:*		
	Fazendeiro	Carpinteiro	Alfaiate
Fazendeiro	$\frac{7}{16}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{16}$
Carpinteiro	$\frac{5}{16}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{16}$
Alfaiate	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

*Extraído do livro: Introdução à Álgebra Linear com aplicações, Kolman, B. e Hill, D. R., LTC, RJ,2006 –Seção 8.5

Os gastos do fazendeiro são:

$$\frac{7}{16}p_1+\frac{1}{2}p_2+\frac{3}{16}p_3$$

Enquanto sua renda é p_1, pois ele produz uma unidade de comida. Como as despesas tem que ser iguais à receita temos:

$$\tfrac{7}{16}p_1+\tfrac{1}{2}p_2+\tfrac{3}{16}p_3=p_1. \tag{1}$$

Analogamente, para o carpinteiro, obtemos

$$\tfrac{5}{16}p_1+\tfrac{1}{6}p_2+\tfrac{5}{16}p_3=p_2, \tag{2}$$

e, para o alfaiate,

$$\tfrac{1}{4}p_1+\tfrac{1}{3}p_2+\tfrac{1}{2}p_3=p_3. \tag{3}$$

As Eqs. (1), (2) e (3) podem ser escritas em forma matricial como

$$A\mathbf{p}=\mathbf{p}, \tag{4}$$

onde

$$A=\begin{bmatrix}\frac{7}{16} & \frac{1}{2} & \frac{3}{16}\\ \frac{5}{16} & \frac{1}{6} & \frac{5}{16}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}, \qquad \mathbf{p}=\begin{bmatrix}p_1\\ p_2\\ p_3\end{bmatrix}.$$

No contexto econômico o problema é encontrar uma solução **p** cujas componentes p_i são não negativas com pelo menos um p_i positivo, já que **p=0** significa que todos os preços são nulos, o que não faz sentido