

# GAN 00007

# Álgebra Linear

Turma B1

Profa. Ana Maria Luz Fassarella do  
Amaral



# Informações:

- Página da disciplina:

<http://www.professores.uff.br/anamluz/ensino/>

+ConexãoUFF

- E-mail professora:

analuz@id.uff.br

(no título do e-mail colocar nome da disciplina)

- Atendimento (com professora – agendar por e-mail):

Local: Gab 23 – Bloco G - Gragoatá

Dia disponível: Segunda-feira 14:00 as 15:00



# Bibliografia Básica:

- Álgebra Linear com Aplicações, H. Anton e C. Rorres, Bookman, 2001.
- Material de Apoio: Notas de Álgebra linear, Jones Colombo e José Koiller, em preparação.

## **Outras referências utilizadas:**

- STEINBRUCH, Alfredo, WINTERLE. Álgebra Linear
- Introdução à Álgebra Linear com Aplicações, Kolman, B. e Hill, D. R., LTC, RJ, 2006.



# Datas das Provas:

Período letivo: 13/08/2018-21/12/2018

- P1: 09/10/18
- P2: 04/12/18
- VR: 11/12/18(\*)
- VS: 18/12/18

(\*) VR somente para quem perdeu P1 ou P2



# Sobre a disciplina:

- Álgebra Linear: Estudo de matrizes e tópicos relacionados
- Algumas Aplicações:  
telecomunicações, estatística, teoria do Jogos, computação gráfica, modelos econômicos,...



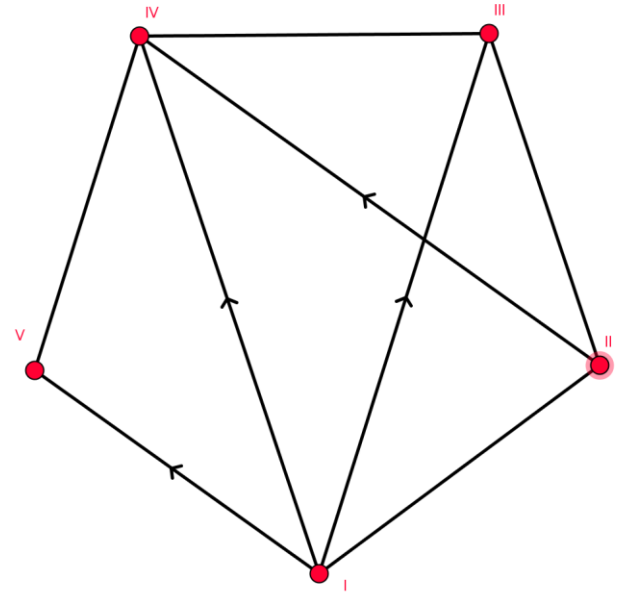
# Álgebra Linear: motivação:

- **Aplicação em telecomunicações:**
- Uma rede de comunicação tem cinco locais com transmissores de potências distintas. Estabelecemos que
- $a_{ij} = 1$ , na matriz abaixo significa que a estação  $i$  pode transmitir diretamente à estação  $j$ ,  $a_{ij} = 0$  significa que a transmissão da estação  $i$  não alcança a estação  $j$ . Uma estação não transmite diretamente para si mesma o que aparece representado pelo fato de que a diagonal principal da matriz é nula.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

# Álgebra Linear: motivação:

- A figura ao lado representa as relações de transmissão entre as estações. Os pontos representam as estações e estão rotuladas com números romanos, as ligações com seta indicam a transmissão (direta) orientada no sentido estação de saída – estação de chegada e as ligações sem seta indicam que a transmissão (direta) ocorre nos dois sentidos. Como exemplo, a estação III pode transmitir diretamente à estação IV e vice-versa. Já a estação II pode transmitir diretamente à estação IV, porém a estação IV não pode transmitir diretamente à estação II.



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

# Álgebra Linear: motivação:

- Teoria dos Jogos



John Nash (1928) – Pêmrio Nobel em economia em 1994



Exemplo de jogo matricial (sempre se supõe que ambos os jogadores são igualmente capazes, que cada um está jogando o melhor possível e que cada jogador escolhe sua jogada sem saber o que seu oponente vai fazer), e de soma-zero (quantidade ganha por um jogador é exatamente a quantidade perdida pelo outro jogador)

**EXEMPLO 1** ■ Considere o jogo de cara ou coroa, consistindo em dois jogadores,  $R$  e  $C$ , cada um dos quais tem uma moeda em sua mão. Cada jogador mostra um lado de sua moeda sem saber a escolha de seu oponente. Se ambos os jogadores estão mostrando o mesmo lado da moeda,  $R$  ganha R\$ 1,00 de  $C$ ; caso contrário,  $C$  ganha R\$ 1,00 de  $R$ .

Nesse jogo de duas pessoas e soma zero, cada jogador tem duas jogadas possíveis: pode mostrar cara ou coroa. A matriz de pagamentos, então é\*

$$R \begin{array}{c} H \\ T \end{array} \begin{array}{cc} & C \\ & \begin{array}{cc} H & T \end{array} \\ \left[ \begin{array}{cc} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{array} \right]. \end{array}$$



# Correlação amostral

## Correlação amostral

### Coefficiente de correlação de Pearson

A correlação amostral trata da medida da direção e do grau com que as variáveis  $X$  e  $Y$  se associam linearmente em uma amostra.

Para uma série de  $n$  medições de  $X$  e  $Y$ ,  $x_i$  e  $y_i$  para  $i = 1, 2, \dots, n$ , o coeficiente de correlação da amostra pode ser usado para estimar o coeficiente de correlação de Pearson da população  $r$  entre  $X$  e  $Y$ . Então, o coeficiente de correlação da amostra é escrito como:

$$r_{xy} = \frac{Cov(X, Y)}{S_x S_y} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}},$$

em que  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  são as médias amostrais de  $X$  e  $Y$ .

O coeficiente de correlação de Pearson  $r_{xy}$  é definido apenas se os desvios padrão  $S_x$  e  $S_y$  forem finitos e diferentes de zero. Isto também pode ser escrito como:

$$r_{xy} = \frac{\sum x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{n s_x s_y} = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{\sqrt{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \sqrt{n \sum y_i^2 - (\sum y_i)^2}}.$$

Se  $x$  e  $y$  são resultados de medições que contêm erros de medições, os limites realistas no coeficiente de correlação não são -1 para +1, mas um intervalo menor.



## Interpretação geométrica

As duas séries de valores  $X = (x_1, \dots, x_n)$  e  $Y = (y_1, \dots, y_n)$  podem ser consideradas vetores em um espaço de dimensão  $n$ . Com a substituição por vetores centrados nas médias, têm-se  $X = (x_1 - \bar{x}, \dots, x_n - \bar{x})$  e  $Y = (y_1 - \bar{y}, \dots, y_n - \bar{y})$ .

O cosseno do ângulo  $\alpha$  entre os vetores  $X$  e  $Y$ , usando a norma euclidiana e o produto escalar normalizado, é dado pela fórmula

$$\cos(\alpha) = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2}},$$

Portanto,  $\cos(\alpha) = r_{xy}$ , em que  $r_{xy}$  está sempre -1 e 1.

O coeficiente de correlação é o cosseno do ângulo  $\alpha$  entre os dois vetores centrados:

- Se  $\alpha = 0^\circ$ , então  $r = 1$  e os dois vetores são colineares (paralelos);
- Se  $\alpha = 90^\circ$ , então  $r = 0$  e os dois vetores são ortogonais;
- Se  $\alpha = 180^\circ$ , então  $r = -1$  e os dois vetores são colineares, mas em direções opostas.

Mais genericamente,  $\alpha = \arccos(r)$ , em que  $\arccos$  é a função inversa do cosseno.  $\alpha$  representa, do ponto de vista geométrico, a intensidade da correlação entre os dois vetores aleatórios  $X$  e  $Y$ , o que não pode ser medido em um teste de significância.

# Computação Gráfica

## Exemplo:

Uma *imagem digital* é uma matriz  $M \times N$  onde cada elemento da matriz é um elemento de um espaço vetorial  $V$ . O caso mais comum é quando  $V$  é um espaço de cor. Chama-se de *resolução* da imagem à ordem  $M \times N$  da matriz. De modo análogo, define-se *imagem volumétrica* tomando matrizes de ordem  $M \times N \times P$ , onde cada entrada também é um elemento do espaço de cor. É comum utilizarem-se os termos *imagens bidimensionais* e *imagens tridimensionais* para cada um dos dois casos, respectivamente.

O formato matricial de dados permite a representação de imagens bidimensionais e volumétricas. Note-se que a estrutura da matriz determina implicitamente a conectividade de seus elementos. Cada elemento é chamado de *pixel*.

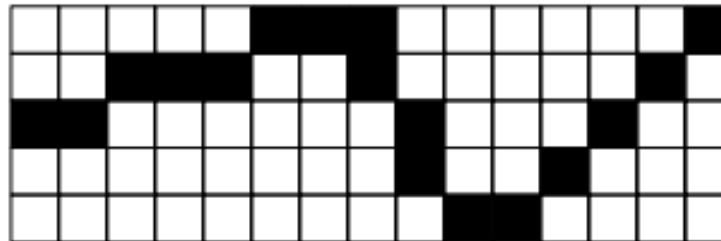
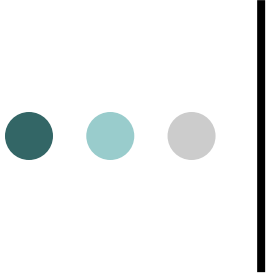


Figura 1.3: Formato Matricial.



# Exemplo de um problema que pode ser resolvido via Álgebra Linear

- *Uma costureira produz roupas customizadas: calças, vestidos e macacões. Cada calça leva 1 hora para ser costurada, 2 horas para ser tingida e 2 horas para ser customizada. Cada vestido leva 2 horas para ser costurado, 2 horas para ser tingido e 4 horas para ser customizado. Cada macacão leva 3 horas para ser costurado, 2 horas para ser tingido e 3 horas para ser customizado. A costureira utiliza a máquina de costura durante 17 horas por semana, a bancada para tingir 20 horas por semana, e a bancada para customizar as roupas 28 horas por semana. Quantas roupas (por semana) de cada tipo a costureira consegue produzir?*



# Referências:

- Notas de aula : Introdução a Computação Gráfica – IMPA  
(<http://underpop.free.fr/g/graficos/computacao-grafica/introducao-a-computacao-grafica.pdf>)
- <https://pt.wikipedia.org/wiki/Correla%C3%A7%C3%A3o>
- Introdução à Álgebra Linear com Aplicações, Kolman, B. e Hill, D. R., LTC, RJ,2006.