GAN00140-Álg. Linear GAN00007 – Int à Alg. Linear 2018.2

Aula 3 – 2ª. Parte:

Matrizes e Operações Matriciais

Matrizes

Definição 1 (Matriz): Chamamos de Matriz a todo conjunto de "valores", dispostos em linhas e colunas. Representamos matrizes com letras maiúsculas do nosso alfabeto.

Dada uma matriz A denotaremos cada elemento da matriz A por a_{ij} onde i é o número da linha e j é o número da coluna desse elemento.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n}$$

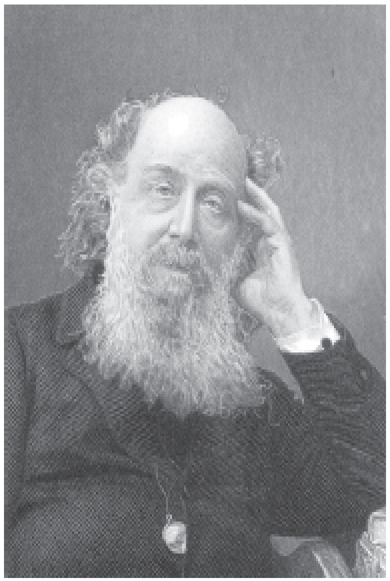
Exemplo: uma matriz genérica 3x2 teria a forma:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

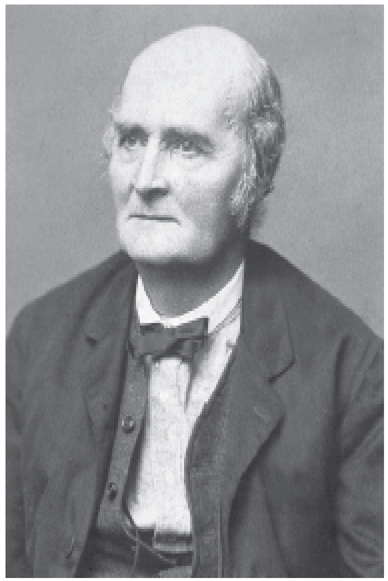
Matrizes-linha e **matrizes-coluna (vetores linha e coluna)** são de importância especial e é prática comum denotá-los por letras minúsculas em negrito em vez de letras maiúsculas. Assim um vetor linha 1xn arbitrário **a** e um vetor coluna mx1 arbitrário **b** podem ser escritos como

$$\mathbf{a} = [a_1\ a_2\ \ldots a_n],\ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Nota histórica:



James Sylvester
(1814–1897)



Arthur Cayley
(1821–1895)

Nota histórica O termo *matriz* foi usado pela primeira vez pelo matemático inglês James Sylvester, que definiu o termo em 1850 como "um arranjo oblongo de números". Sylvester comunicou seu trabalho com matrizes ao colega matemático e advogado inglês chamado Arthur Cayley, que então introduziu algumas das operações matriciais básicas num livro intitulado *Memoir on the Theory of Matrices* (*Ensaio sobre a Teoria de Matrizes*), publicado em 1858. Como curiosidade, Sylvester nunca se formou, porque, sendo judeu, recusou-se a assinar o exigido juramento à igreja Anglicana. Ele foi nomeado para uma cátedra na University of Virginia, nos Estados Unidos, mas renunciou depois de espancar com sua bengala um aluno que estava lendo um jornal em aula. Sylvester, pensando que havia matado o aluno, fugiu de volta para a Inglaterra no primeiro navio disponível. Felizmente, o aluno não morreu, só estava em choque!

[Imagem: Coleção Granger, Nova York]

Fonte: Álgebra Linear com Aplicações, H. Anton e C. Rorres, Bookman, 2012.

Tipos de Matrizes

Matriz Quadrada: é matriz cujo número de linhas é igual ao de colunas.

Matriz Transposta: é a matriz obtida trocando-se a linha pela coluna e vice-versa da matriz original.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 0 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 3 \\ -5 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Matriz Identidade: é a matriz quadrada cujos elementos da diagonal principal são iguais a 1 e os demais elementos iguais a zero.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

diagonal principal

Matriz Nula: Chama-se matriz nula a matriz na qual todos os seus elementos são iguais a zero.

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz Triangular: é matriz cujos elementos localizados acima ou abaixo da diagonal principal são iguais a zero. Se os zeros estão acima da diagonal a matriz é triangular inferior, se estão abaixo da diagonal a matriz é triangular superior

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Triangular inferior

Matriz Diagonal: é a matriz cujos elementos localizados acima e abaixo da diagonal principal são iguais a zero.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Matriz Simétrica: Os elementos opostos em relação à diagonal principal são iguais.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 7 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad A = A^T$$

Matriz Anti-Simétrica: Os elementos opostos em relação à diagonal principal são simétricos com o sinal trocado.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -2 \\ -5 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A = -A^T$$

Traço de uma matriz

Se A é uma matriz quadrada então o **traço de A**, denotado por tr(A), é definido pela soma das entradas na diagonal principal de A. O traço de A não é definido se A não é uma matriz quadrada.

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 0 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix},$$

$$tr(A) = 1 + (-2) + 6 = 5$$

Operações sobre matrizes

Igualdade de matrizes: Dadas duas matrizes A e B do mesmo tamanho (ou seja, de mesma ordem), dizemos que A = B se somente se os seus elementos são respectivamente iguais. Simbolicamente, sendo A e B matrizes mx n, temos:

$$\boxed{A = B \iff a_{ij}=b_{ij}}$$

Operações sobre matrizes

Adição e Subtração: Para adicionarmos ou subtrairmos duas matrizes A e B basta que elas sejam de mesma ordem. Isto é, elas devem ter o mesmo número de linhas e o mesmo número de colunas.

Define-se a adição A + B = C como sendo formada pelos elementos $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Define-se a subtração A - B = C como sendo formada pelos elementos $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad A + B = \begin{bmatrix} 3 & 11 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

Operações sobre matrizes

Multiplicação de matrizes: Dada duas matrizes A (m x n) e B (n x p), chama-se produto da matriz A pela matriz B que se indica C = A . B a matriz m x p definida por

$$C_{ij}=a_{i1}.b_{1j} + a_{i2}.b_{2j} + a_{i3}.b_{3j} + ... + a_{in}.b_{nj}$$

Observações:

- O produto de duas matrizes existe se e somente se o número de colunas da matriz A for igual ao número de linhas da matriz B.
- Se as matrizes A e B são m x n e n x p respectivamente, então o produto C = A . B existe e é uma matriz m x p,

Operações sobre matrizes

Exemplo (Multiplicação):

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \; e \; B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$C = A.B = \begin{bmatrix} 2.3+3.2 & 2.1+3.4 \\ 1.3+0.2 & 1.1+0.4 \\ 4.3+5.2 & 4.1+5.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 14 \\ 3 & 1 \\ 22 & 24 \end{bmatrix}$$

Nota histórica

Gotthold Eisenstein
(1823–1852)

Nota histórica O conceito de multiplicação matricial é devido ao matemático alemão Gotthold Eisenstein, que introduziu a ideia em torno de 1844, para simplificar o processo de efetuar substituições em sistemas lineares. A ideia, então, foi expandida e formalizada por Cayley em sua obra *Memoir on the Theory of Matrices* (*Ensaio sobre a Teoria de Matrizes*), publicada em 1858. Eisenstein foi um aluno de Gauss, que o qualificou como sendo do nível de Isaac Newton e Arquimedes. Contudo, o potencial de Eisenstein nunca foi realizado, porque viveu doente toda sua vida e faleceu aos 30 anos.

[Imagem: Wikipedia]

- Fonte: Álgebra Linear com Aplicações, H. Anton e C. Rorres, Bookman, 2012.

Propriedades (Soma de Matrizes)

$$1-(A+B)+C=A+(B+C)$$

$$2-A+B=B+A$$

$$3-A+M=A$$

$$4-A+A'=0$$

aqui M representa a matriz nula (0) e A'=(-A)

Propriedades (Produto de uma Matriz por um escalar)

$$1 - a.(b.A) = (a.b).A$$

$$2 - a.(A + B) = a.A + a.B$$

$$3 - (a + b).A = a.A + b.A$$

$$4 - 1.A = A$$

Acima a e b são escalares (o **produto de uma matriz A por um escalar b** é a matriz bA obtida pela multiplicação de cada entrada da matriz A por b).

Propriedades (Produto de Matizes)

$$1 - A.(B.C) = (A.B).C$$

$$2 - A.(B + C) = A.B + A.C$$

$$3 - (A + B).C = A.C + B.C$$

$$4 - k(A.B) = A.(k.B) = k.(A.B)$$

$$5 - I.A = A$$

Em geral A.B≠B.A. Acima I é matriz identidade de mesma ordem de A

Propriedades (Matriz Transposta)

$$1-\left(A^t\right)^t = A$$

$$2-\left(A+B\right)^t = A^t + B^t$$

$$3-\left(k.A\right)^t = k.A^t$$

$$4-\left(A.B\right)^t = B^t.A^t$$

Matrizes em blocos (particionadas)

Uma matriz pode ser subdividida em blocos ou particionada em matrizes menores inserindo cortes horizontais e verticais entre linhas e colunas. Por exemplo, as seguintes são três partições possíveis de uma matriz 3X4 arbitrária.

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

$$A = \left[\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{r}_3 \end{bmatrix}$$

$$A = \left[\begin{array}{c|c|c|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right] = [\mathbf{c}_1 \quad \mathbf{c}_2 \quad \mathbf{c}_3 \quad \mathbf{c}_4]$$

Multiplicação matricial por colunas e linhas

A partição de matrizes em blocos tem muitas utilidades, uma das quais sendo encontrar uma linha ou coluna específica de um produto matricial A.B sem calcular todo o produto.

j-ésimo vetor coluna de A.B=A.[j-ésimo vetor coluna de B]

i-ésimo vetor linha de A.B=[i-ésimo vetor linha de A].B

Exemplo: Sejam

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 4\\ 2 & 6 & 0\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}4 & 1\\ 0 & -1\\ 2 & 7\end{bmatrix}$$

Multiplicação matricial por colunas e linhas

O segundo vetor coluna de A.B pode ser obtido calculando

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1 + 2.(-1) + 4.7 \\ 2.1 + 6.(-1) + 0.7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Segunda coluna de A.B

Segunda coluna de B

Produtos matriciais como combinações lineares

Sejam

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Então

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

Dizemos que o produto A**x** de uma matriz A por um vetor coluna **x** é uma **combinação linear** dos vetores colunas de A com coeficientes provenientes do vetor **x**

Forma matricial de um sistema linear

Considere o sistema linear com m equações e n incógnitas:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 &+ a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 &+ a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots & \qquad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 &+ a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{aligned}$$

Podemos substituir m equações deste sistema por uma única equação matricial:

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Forma matricial de um sistema linear

A matriz mx1 à esquerda desta equação pode ser escrita como um produto:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{\text{Matriz de coeficientes}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{\text{Matriz-coluna de incógnitas}} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}_{\text{Matriz-coluna de constantes}}$$

Denotando estas matrizes por A, **x** e **b**, respectivamente, o sistema original de m equações e n incógnitas foi substituído pela única equação matricial:

$$\boxed{A\mathbf{x} = \mathbf{b}}$$