Aula 7: Determinantes (continuação)

GAN00007 – Int à Alg. Linear – B1
2018.2

Profa. Ana Maria Luz F. do Amaral

Recapitulando:
Determinantes, sistemas e invertibilidade

Teorema "do Curso": Se A é uma matriz nxn, então as seguintes afirmações são equivalentes:

a) A é invertível.

b) **Ax=0** só tem a solução trivial.

c) A forma escalonada reduzida por linhas de A é I_n.

d) A pode ser expressa como um produto de matrizes elementares.

e) **Ax=b** é consistente para cada vetor coluna **b** de tamanho nx1.

f) **Ax=b** tem exatamente uma solução para cada vetor coluna **b** nx1.

g) det(A)≠0.

Expansão em cofatores

Definição: (menor de a_{ij}) Se A é uma matriz quadrada então o determinante menor da entrada a_{ij}, ou simplesmente o menor de a_{ij} é denotado por M_{ij} e definido como o determinante da submatriz que sobra quando suprimido a i-ésima linha e j-ésima coluna de A.

Exemplo:

$$Seja\ \ A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, o\, menor\, de\, a_{11}\ é$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 45 - 48 = -3$$

Definição: (cofator de a_{ij}): O número $(-1)^{i+j} M_{ij}$ é chamado de cofator de a_{ij} e será denotado por C_{ij}.

Expansão em cofatores

Observe a fórmula para o determinante de ordem 3:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} + a_{13}.a_{21}.a_{32} \\ - a_{13}.a_{22}.a_{31} - a_{12}.a_{21}.a_{33} - a_{11}.a_{23}.a_{32} \end{array}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13}$$

$$= a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$$

(expansão em cofatores ao longo da primeira linha)

Expansão em cofatores

Teorema: O determinante de uma matriz A (nxn) pode ser obtido pela soma dos produtos dos elementos de uma fila qualquer (linha ou coluna) da matriz A pelos respectivos cofatores. Estas somas são denominadas expansões em cofatores de det(A).

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \ldots + a_{in}C_{in}$$

(expansão em cofatores ao longo da linha i)

$$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \ldots + a_{nj}C_{nj}$$

(expansão em cofatores ao longo da coluna j)

Expansão em cofatores

Definição: (matriz de cofatores e adjunta de A) Se A é uma matriz quadrada de ordem n e C_{ij} é o cofator de a_{ij} então a matriz

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

é chamada matriz de cofatores de A. A transposta desta matriz é chamada adjunta de A e denotada por adj(A).

Fórmula para inversa de uma matriz

Teorema: Se A é uma matriz nxn, invertível então

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A)}$$

Idéia da prova: Mostra –se que:

$$A.adj(A) = \det(A).I$$

Como A é invertível, det(A)≠0. Portanto a equação pode ser reescrita como:

$$\frac{1}{\det(A)}\left[A.adj(A)\right] = I \; ou \;\; A.[\frac{1}{\det(A)}.adj(A)] = I$$

Multiplicando-se ambos os lados à esquerda por A^{-1} obtemos:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A)$$

Regra de Cramer

Teorema: (Regra de Cramer) Se Ax=b é um sistema de n equações lineares com n incógnitas tal que det(A)≠0, então o sistema tem uma única solução. Esta solução é:

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \ldots, x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)},$$

onde A_j é a matriz obtida subtraindo as entradas da j-ésima coluna de A pelas entradas do vetor coluna **b.**

Observação: Quando det(A)≠0 onde A é a matriz dos coeficientes de um sistema linear, o sistema é chamado sistema de Cramer

Idéia da prova + Exemplo: Quadro

Regra de Cramer

Através da Regra de Cramer podemos classificar um sistema linear quanto as suas soluções:

Se det(A)=0 e pelo menos um dos det(A_i)≠0 o sistema é **imcompatível.**

Se det(A)=0 e det(A_i)=0 para todo i o sistema é **compatível e indeterminado.**

Se det(A) ≠0 o sistema é **compatível e determinado.**