Aula 08 – Parte 2: Espaços e Subespaços Vetoriais

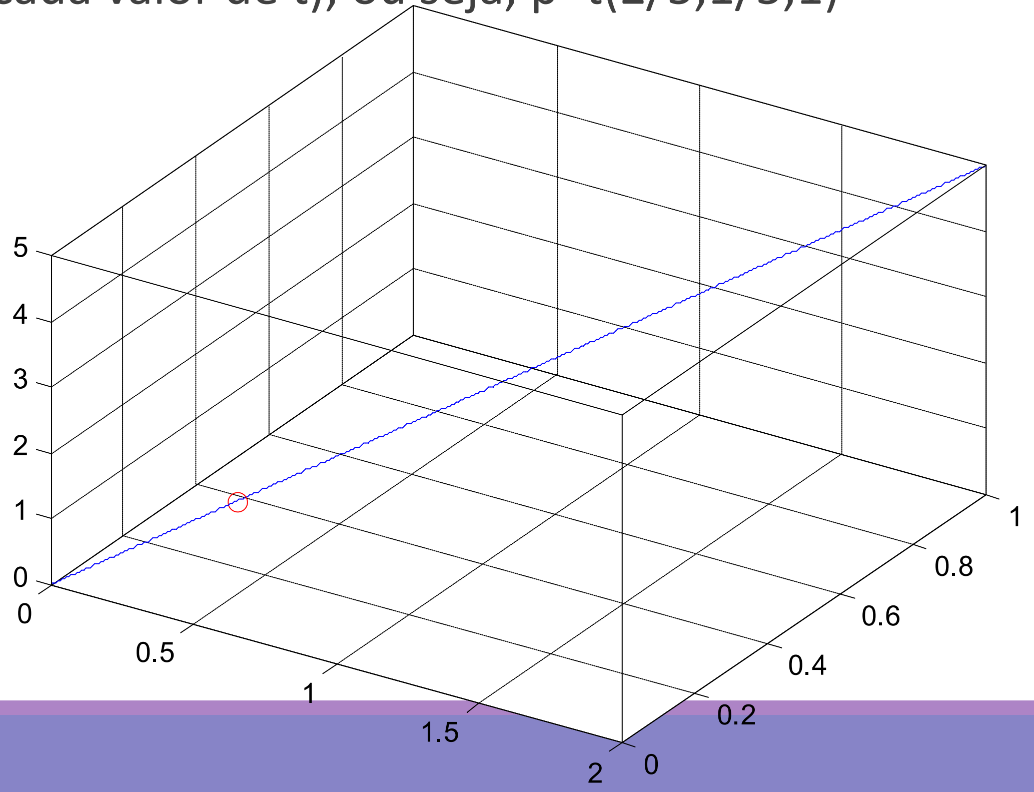
GAN00007 – Int à Alg. Linear – B1
2018.2
Profa. Ana Maria Luz F. Amaral

Motivação:

Considere a equação matricial Ax=0 com $A=\begin{bmatrix}1 & 3 & -1\\ 2 & 1 & -1\\ 3 & 4 & -2\end{bmatrix}$

Tal sistema tem como solução $p=t\begin{bmatrix}2/5\\ 1/5\\ 1\end{bmatrix}$,onde t é um número real arbitrário.

Geometricamente podemos representar p como um ponto do IR^3 (para cada valor de t), ou seja, p=t(2/5,1/5,1)



Vetores no IR^n

Definição

Dois vetores $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ em R^n são ditos ***iguais*** se

$$u_1 = v_1, u_2 = v_2, \ldots, u_n = v_n$$

A ***soma*** $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ é definida por

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n)$$

e se k é um escalar qualquer, o ***múltiplo escalar*** $k\mathbf{v}$ de $\mathbf{v}$ é definido por

$$k\mathbf{v} = (kv_1, kv_2, \ldots, kv_n)$$

Propriedades do vetores em IR^n

Teorema 4.1.1 **Propriedades de Vetores em R^n**

Se $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ *e* $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ *são vetores em* R^n *e* k *e* l *são escalares, então:*

(*a*) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$

(*b*) $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$

(*c*) $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$

(*d*) $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$, *ou seja*, $\mathbf{u} - \mathbf{u} = \mathbf{0}$

(*e*) $k(l\mathbf{u}) = kl(\mathbf{u})$

(*f*) $l(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = l\mathbf{u} + l\mathbf{v}$

(*g*) $(k + l)\mathbf{v} = k\mathbf{v} + l\mathbf{v}$

(*h*) $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

Espacos Vetoriais Reais

Definição

Seja V um conjunto não-vazio qualquer de objetos no qual estão definidas duas operações, a adição e a multiplicação por escalares (números). Por ***adição*** nós entendemos uma regra que associa a cada par de objetos $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ em V um objeto $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, chamado a ***soma*** de $\mathbf{u}$ com $\mathbf{v}$; por ***multiplicação por escalar*** nós entendemos uma regra que associa a cada escalar k e cada objeto $\mathbf{v}$ em V um objeto $k\mathbf{v}$, chamado o ***múltiplo*** de $\mathbf{v}$ por k. Se os seguintes axiomas são satisfeitos por todos objetos $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ em V e quaisquer escalares k e l, então nós dizemos que V é um ***espaço vetorial*** e que os objetos de V são ***vetores***.

(1) Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são objetos em V então $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ é um objeto em V.

(2) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$

(3) $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$

(4) Existe um objeto $\mathbf{0}$ em V, chamado um ***vetor nulo*** ou ***vetor zero*** de V, tal que $\mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$ para cada $\mathbf{u}$ em V.

(5) Para cada $\mathbf{u}$ em V, existe um objeto $-\mathbf{u}$, chamado um ***negativo*** de $\mathbf{u}$, tal que $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = (-\mathbf{u}) + \mathbf{u} = \mathbf{0}$.

(6) Se k é qualquer escalar e $\mathbf{v}$ é um objeto em V, então $k\mathbf{v}$ é um objeto em V.

(7) $l(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = l\mathbf{u} + l\mathbf{v}$

(8) $(k + l)\mathbf{v} = k\mathbf{v} + l\mathbf{v}$

(9) $k(l\mathbf{u}) = (kl)\mathbf{u}$

(10) $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

Exemplos de Espaços Vetoriais Reais

Exemplo 2.1. $\mathbb{R}^2 = \{(x,y)/x,y \in \mathbb{R}\}$ *com as operações de adição e multiplicação por um escalar definidas como:*

$$(x,y) + (z,w) = (x+z, y+w), \;\; \alpha(x,y) = (\alpha x, \alpha y)$$

Exemplo 2.2. *Os conjuntos* $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, ..., \mathbb{R}^n$ *com as operações de adição e multiplicação por escalar usuais.*

Exemplo 2.3. *O conjunto das matrizes* $m \; x \; n$ *com as operações adição e multiplicação por escalar usuais.*

Exemplo 2.4. *O conjunto dos polinômios com coeficientes reais de grau* $\leq n$, *mais o polinômio nulo, em relação às operações usais de adição de polinômios e multiplicação por escalar.*

Subespaços Vetoriais

Definição

Um subconjunto W de um espaço vetorial V é chamado um ***subespaço vetorial*** de V se W é um espaço vetorial em relação às operações de adição e multiplicação por escalar definidas em V.

Teorema 5.2.1

Se W é um conjunto de um ou mais vetores de um espaço vetorial V, então W é um subespaço de V se, e somente se, valem as seguintes condições.

(a) *Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são vetores em W, então $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ está em W.*

(b) *Se l é um escalar qualquer e $\mathbf{u}$ é um vetor qualquer em W, então $l\,\mathbf{u}$ está em W.*

Exemplos de Subespaços Vetoriais Reais

- Todo espaço vetorial V admite no mínimo dois subespaços vetoriais: {0} e o próprio espaço V. Esses dois são subespaços triviais de V, os demais são denominados subespaços próprios de V.

Exemplo 2.5. $V = \mathbb{R}^2$ *e* $S = \{(x, 0)/x \in \mathbb{R}\}$ *é um subespaço vetorial de* V *com as operações usuais.*

Exemplo 2.6. $V = \mathbb{R}^2$ *e* $S = \{(x, 4 - 2x)/x \in \mathbb{R}\}$ *não é um subespaço vetorial* V *com as operações usuais.*