

# Aula 08 – Parte 2: Espaços e Subespaços Vetoriais

---

GAN00140-Álg. Linear- G1 -2018.2

Profa. Ana Maria Luz F. do Amaral

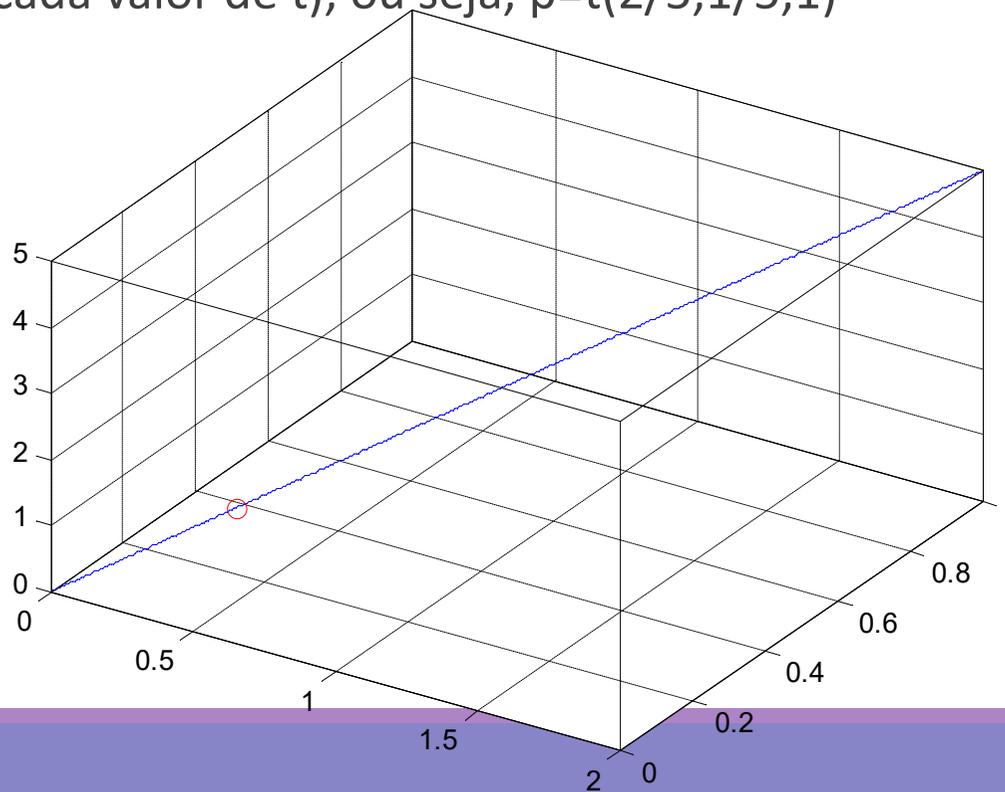


# Motivação:

Considere a equação matricial  $Ax=0$  com  $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \end{bmatrix}$

Tal sistema tem como solução  $p = t \begin{bmatrix} 2/5 \\ 1/5 \\ 1 \end{bmatrix}$ , onde  $t$  é um número real arbitrário.

Geometricamente podemos representar  $p$  como um ponto do  $\mathbb{R}^3$  (para cada valor de  $t$ ), ou seja,  $p = t(2/5, 1/5, 1)$



# Vetores no $\mathbb{R}^n$

---

## Definição

Dois vetores  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  e  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  em  $\mathbb{R}^n$  são ditos *iguais* se

$$u_1 = v_1, u_2 = v_2, \dots, u_n = v_n$$

A *soma*  $\mathbf{u} + \mathbf{v}$  é definida por

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n)$$

e se  $k$  é um escalar qualquer, o *múltiplo escalar*  $k\mathbf{v}$  de  $\mathbf{v}$  é definido por

$$k\mathbf{v} = (kv_1, kv_2, \dots, kv_n)$$

# Propriedades do vetores em $\mathbb{R}^n$

## **Teorema 4.1.1**

### **Propriedades de Vetores em $\mathbb{R}^n$**

Se  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ ,  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  e  $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n)$  são vetores em  $\mathbb{R}^n$  e  $k$  e  $l$  são escalares, então:

(a)  $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$

(b)  $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$

(c)  $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$

(d)  $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ , ou seja,  $\mathbf{u} - \mathbf{u} = \mathbf{0}$

(e)  $k(l\mathbf{u}) = kl(\mathbf{u})$

(f)  $l(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = l\mathbf{u} + l\mathbf{v}$

(g)  $(k + l)\mathbf{v} = k\mathbf{v} + l\mathbf{v}$

(h)  $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

# Espacos Vetoriais Reais

## Definição

Seja  $V$  um conjunto não-vazio qualquer de objetos no qual estão definidas duas operações, a adição e a multiplicação por escalares (números). Por *adição* nós entendemos uma regra que associa a cada par de objetos  $u$  e  $v$  em  $V$  um objeto  $u + v$ , chamado a *soma* de  $u$  com  $v$ ; por *multiplicação por escalar* nós entendemos uma regra que associa a cada escalar  $k$  e cada objeto  $v$  em  $V$  um objeto  $kv$ , chamado o *múltiplo* de  $v$  por  $k$ . Se os seguintes axiomas são satisfeitos por todos objetos  $u, v$  e  $w$  em  $V$  e quaisquer escalares  $k$  e  $l$ , então nós dizemos que  $V$  é um *espaço vetorial* e que os objetos de  $V$  são *vetores*.

- (1) Se  $u$  e  $v$  são objetos em  $V$  então  $u + v$  é um objeto em  $V$ .
- (2)  $u + v = v + u$
- (3)  $u + (v + w) = (u + v) + w$
- (4) Existe um objeto  $0$  em  $V$ , chamado um *vetor nulo* ou *vetor zero* de  $V$ , tal que  $0 + u = u + 0 = u$  para cada  $u$  em  $V$ .
- (5) Para cada  $u$  em  $V$ , existe um objeto  $-u$ , chamado um *negativo* de  $u$ , tal que  $u + (-u) = (-u) + u = 0$ .
- (6) Se  $k$  é qualquer escalar e  $v$  é um objeto em  $V$ , então  $kv$  é um objeto em  $V$ .
- (7)  $l(u + v) = lu + lv$
- (8)  $(k + l)v = kv + lv$
- (9)  $k(lu) = (kl)u$
- (10)  $1u = u$

# Exemplos de Espaços Vetoriais Reais

**Exemplo 2.1.**  $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) / x, y \in \mathbb{R}\}$  com as operações de adição e multiplicação por um escalar definidas como:

$$(x, y) + (z, w) = (x + z, y + w), \quad \alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y)$$

**Exemplo 2.2.** Os conjuntos  $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \dots, \mathbb{R}^n$  com as operações de adição e multiplicação por escalar usuais.

**Exemplo 2.3.** O conjunto das matrizes  $m \times n$  com as operações de adição e multiplicação por escalar usuais.

**Exemplo 2.4.** O conjunto dos polinômios com coeficientes reais de grau  $\leq n$ , mais o polinômio nulo, em relação às operações usuais de adição de polinômios e multiplicação por escalar.

# Subespaços Vetoriais

## Definição

Um subconjunto  $W$  de um espaço vetorial  $V$  é chamado um *subespaço vetorial* de  $V$  se  $W$  é um espaço vetorial em relação às operações de adição e multiplicação por escalar definidas em  $V$ .

## Teorema 5.2.1

*Se  $W$  é um conjunto de um ou mais vetores de um espaço vetorial  $V$ , então  $W$  é um subespaço de  $V$  se, e somente se, valem as seguintes condições.*

- (a) *Se  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  são vetores em  $W$ , então  $\mathbf{u} + \mathbf{v}$  está em  $W$ .*
- (b) *Se  $l$  é um escalar qualquer e  $\mathbf{u}$  é um vetor qualquer em  $W$ , então  $l\mathbf{u}$  está em  $W$ .*

# Exemplos de Subespaços Vetoriais Reais

---

- Todo espaço vetorial  $V$  admite no mínimo dois subespaços vetoriais:  $\{0\}$  e o próprio espaço  $V$ . Esses dois são subespaços triviais de  $V$ , os demais são denominados subespaços próprios de  $V$ .

**Exemplo 2.5.**  $V = \mathbb{R}^2$  e  $S = \{(x, 0)/x \in \mathbb{R}\}$  é um subespaço vetorial de  $V$  com as operações usuais.

**Exemplo 2.6.**  $V = \mathbb{R}^2$  e  $S = \{(x, 4 - 2x)/x \in \mathbb{R}\}$  não é um subespaço vetorial  $V$  com as operações usuais.