Álgebra Linear 2018.2

Aula sobre

Diagonalização

Profa. Ana Maria Luz F. Amaral

Diagonalização de operadores

Seja T: V→ V um operador linear. Dizemos que T é um operador diagonalizável se existe uma base β de V cujos elementos são autovetores de T.

A matriz que representa T na base β é uma matriz diagonal cujos elementos são os autovalores de T, ou seja:

$$[T]_{\beta}^{\beta} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Quando existe esta base β há uma relação entre a representação do operador T nesta base, com a sua representação em qualquer outra base.

Diagonalização de operadores

Seja M=[T] a matriz canônica do operador T e **D** a matriz de T na base β de autovetores, dizemos que T é diagonalizável se existe uma matriz P tal que

$$\mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{MP}.$$

Onde **P** é a matriz cujas colunas são os autovetores de T e $D=[T]_\beta$.

Assim, a matriz **D** é obtida pela matriz **P**, quando ela existe, sobre a matriz **M**. Dizemos então que a matriz **P** diagonaliza **M** ou que **P** é a matriz diagonalizadora (**P** a matriz de mudança da base de β para a base canônica).

Quando sabemos que é possível encontrar a matriz P e obter D?

Diagonalização de operadores

Teorema: Se M=[T] possui todas as raízes de seu polinômio característico reais e distintas então M é diagonalizável.

Obs: raízes do polinômio característico reais e distintas

$\Downarrow$

autovetores associados a autovalores distintos são L.I

$\Downarrow$

existe uma base de autovetores para V

Teorema: M=[T] (n por n) é diagonalizável se, e somente se tem n autovetores linearmente independentes.

$4^{\underline{a}}$ **Questão.**[2 pts] Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por

$$T(x, y) = (5x + 4y, x + 2y),$$

(a) Determine $[T]$ (matriz de T em relação a base canônica).

(b) Verifique se T é diagonalizável (ou seja, se $A = [T]$ é diagonalizável). Caso afirmativo determine uma matriz P que diagonaliza $A = [T]$, obtenha P^{-1} e calcule $P^{-1}.A.P$.

Diagonalização de operadores

Temos o seguintes resultados para matrizes simétricas:

Teorema: Todas as raízes do polinômio característico de uma matriz simétrica são reais.

Corolário: Se M é uma matriz simétrica com todos os os seus autovalores distintos então M é diagonalizável.

Teorema: Se M é uma matriz simétrica, então os autovetores associados a autovalores distintos são ortogonais.

Teorema: Se M é uma matriz simétrica de ordem n então existe uma matriz ortogonal P tal que $\mathbf{P^{-1}MP=D}$**,** D uma matriz diagonal. Os autovalores de M são elementos da diagonal D.

(Lembrete: Matriz ortogonal $P^{-1}=P^T$).

Exemplos: (Quadro)