24. Prove:
 (a) a parte (*b*) do Teorema 1.4.1
 (b) a parte (*i*) do Teorema 1.4.1
 (c) a parte (*m*) do Teorema 1.4.1
25. Aplique as partes (*d*) e (*m*) do Teorema 1.4.1 às matrizes A, B e $(-1)\,C$ para deduzir o resultado da parte (*f*).
26. Prove o Teorema 1.4.2.
27. Considere as leis de expoentes $A^r A^s = A^{r+s}$ e $(A^r)^s = A^{rs}$.
 (a) Mostre que se A é uma matriz quadrada, estas leis são válidas para quaisquer inteiros não negativos r e s.
 (b) Mostre que se A é invertível, estas leis valem para quaisquer inteiros negativos r e s.
28. Mostre que se A é invertível e k é um escalar não-nulo qualquer, então $(kA)^n = k^n A^n$ para qualquer inteiro n.
29. (a) Mostre que se A é invertível e $AB = AC$, então $B = C$.
 (b) Explique por que a parte (a) e o Exemplo 3 não são contraditórios.
30. Prove a parte (*c*) do Teorema 1.4.1.
 [***Sugestão.*** Suponha que A é $m \times n$, B é $n \times p$ e C é $p \times q$. A ij-ésima entrada do lado esquerdo é $l_{ij} = a_{i1}[BC]_{1j} + a_{i2}[BC]_{2j} + \cdots + a_{in}[BC]_{nj}$ e a ij-ésima entrada do lado direito é $r_{ij} = [AB]_{i1}c_{1j} + [AB]_{i2}c_{2j} + \cdots + [AB]_{ip}c_{pj}$. Verifique que $l_{ij} = r_{ij}$.]

Discussão e Descoberta

31. Sejam A e B matrizes quadradas de mesmo tamanho.
 (a) Dê um exemplo em que $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$.
 (b) Preencha a lacuna para criar uma identidade que é válida para quaisquer A e B. $(A+B)^2 = A^2 + B^2 +$ __________.
32. Sejam A e B matrizes quadradas de mesmo tamanho.
 (a) Dê um exemplo em que $(A+B)(B-A) \neq A^2 - B^2$.
 (b) Preencha a lacuna para criar uma identidade que é válida para quaisquer A e B. $(A+B)(B-A) =$ __________.
33. No sistema dos números reais, a equação $a^2 = 1$ tem exatamente duas soluções. Encontre pelo menos oito matrizes 3×3 que satisfazem a equação $A^2 = I_3$. [***Sugestão.*** Procure soluções entre as matrizes com entradas zero fora da diagonal principal.]
34. Uma afirmação do tipo "Se p, então q" é logicamente equivalente à afirmação "Se não q, então não p." (A segunda afirmação é chamada a ***contraposição lógica*** da primeira.) Por exemplo, a contraposição lógica da afirmação "Se está chovendo, então o chão está molhado" é "Se o chão não está molhado, então não está chovendo."
 (a) Encontre a contraposição lógica da afirmação: Se A^T é singular, então A é singular.
 (b) A afirmação é verdadeira ou falsa? Explique.
35. Sejam A e B matrizes $n \times n$. Decida se cada afirmação a seguir é verdadeira ou falsa. Justifique cada resposta.
 (a) $(AB)^2 = A^2B^2$ deve ser verdadeiro.
 (b) $(A-B)^2 = (B-A)^2$ deve ser verdadeiro.
 (c) $(AB^{-1})(BA^{-1}) = I_n$ deve ser verdadeiro.
 (d) Nunca é verdade que $AB = BA$.

1.5 MATRIZES ELEMENTARES E UM MÉTODO PARA ENCONTRAR A^{-1}

Nesta seção nós vamos desenvolver um algoritmo para encontrar a inversa de uma matriz invertível. Nós também discutiremos algumas das propriedades básicas de matrizes invertíveis.

Nós começamos com a definição de um tipo especial de matriz que pode ser usada para executar uma operação elementar sobre linhas por multiplicação matricial.

Definição

Uma matriz $n \times n$ que pode ser obtida da matriz identidade I_n de tamanho $n \times n$ executando uma única operação elementar sobre linhas é chamada uma ***matriz elementar***.

EXEMPLO 1 Matrizes Elementares e Operações sobre Linhas

Abaixo listamos quatro matrizes elementares e as operações sobre linhas que as produzem.

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -3\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

↑ Multiplique a segunda linha de I_2 por -3 ↑ Permute a segunda linha de I_4 com a quarta. ↑ Some 3 vezes a terceira linha de I_3 à primeira. ↑ Multiplique a primeira linha de I_3 por 1. ♦

Quando uma matriz A é multiplicada *à esquerda* por uma matriz elementar E, o efeito é o de executar uma operação elementar sobre linhas de A. Isto é enunciado no próximo teorema, cuja prova deixamos para os exercícios.

Teorema 1.5.1 Operações sobre Linhas por Multiplicação Matricial

Se a matriz elementar E resulta de efetuar uma certa operação sobre linhas em I_m e se A é uma matriz $m \times n$, então o produto EA é a matriz que resulta quando esta mesma operação sobre linhas é efetuada em A.

EXEMPLO 2 Usando Matrizes Elementares

Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & 3\\ 2 & -1 & 3 & 6\\ 1 & 4 & 4 & 0\end{bmatrix}$$

e considere a matriz elementar

$$E = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 3 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

que resulta de somar 3 vezes a primeira linha de I_3 à terceira linha. O produto EA é

$$EA = \begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & 3\\ 2 & -1 & 3 & 6\\ 4 & 4 & 10 & 9\end{bmatrix}$$

que é precisamente a mesma matriz que resulta quando nós somamos 3 vezes a primeira linha de A à terceira linha. ♦

OBSERVAÇÃO. O Teorema 1.5.1 é principalmente de interesse teórico e será usado para desenvolver alguns resultados sobre matrizes e sistemas de equações lineares. Em termos de contas, é preferível efetuar operações sobre linhas diretamente do que multiplicar à esquerda por uma matriz elementar.

Se uma operação elementar sobre linhas é aplicada a uma matriz identidade I para produzir uma matriz elementar E, então existe uma segunda operação que, aplicada a E, produz de volta a matriz I. Por exemplo, se E é obtida multiplicando a i-ésima linha de I por uma constante não-nula c, então I pode ser recuperada se a i-ésima linha de E é multiplicada por $1/c$. As várias possibilidades estão listadas na Tabela 1. As operações do lado direito desta tabela são chamadas ***operações inversas*** das correspondentes operações do lado esquerdo.

TABELA 1

Operações sobre linhas de I que produzem E	Operações sobre linhas de E que reproduzem I
Multiplique a linha i por $c \neq 0$	Multiplique a linha i por $1/c$
Troque entre si as linhas i e j	Troque entre si as linhas i e j
Some c vezes a linha i à linha j	Some $-c$ vezes a linha i à linha j

EXEMPLO 3 Operações e Operações Inversas sobre Linhas

Em cada um dos exemplos a seguir, foi afetuada uma operação elementar na matriz identidade 2×2 para obter uma matriz elementar E e, em seguida, E foi restaurada à matriz identidade aplicando a operação inversa.

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 7\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

↑ Multiplique a segunda linha por 7. ↑ Multiplique a segunda linha por 1/7.

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

↑ Permute a primeira linha com a segunda. ↑ Permute a primeira linha com a segunda.

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}1 & 5\\ 0 & 1\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

↑ Some 5 vezes a segunda linha à primeira ↑ Some -5 vezes a segunda linha à primeira ♦

O próximo teorema dá uma importante propriedade de matrizes elementares.

Teorema 1.5.2

Qualquer matriz elementar é invertível e a inversa é, também, uma matriz elementar.

Prova. Se E é uma matriz elementar, então E é o resultado de alguma operação elementar sobre linhas de I. Seja E_0 a matriz que resulta quando é efetuada a operação inversa em I. Aplicando o Teorema 1.5.1 e lembrando que operações e suas inversas se cancelam mutuamente, segue que

$$E_0E = I \text{ e } E\,E_0 = I$$

Assim, a matriz elementar E_0 é a inversa de E. ■

O próximo teorema estabelece algumas relações fundamentais entre invertibilidade, sistemas lineares homogêneos, formas escalonadas reduzidas por linhas e matrizes elementares. Estes resultados são extremamente importantes e vão ser usados muitas vezes nas próximas seções.

Teorema 1.5.3 Afirmações Equivalentes

Se A é uma matriz $n \times n$ então as seguintes afirmações são equivalentes, ou seja, são todas verdadeiras ou todas falsas.

(a) A é invertível.
(b) $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tem somente a solução trivial.
(c) A forma escalonada reduzida por linhas de A é I_n.
(d) A pode ser expressa como um produto de matrizes elementares.

Prova. Nós vamos provar a equivalência destas afirmações estabelecendo a cadeia de implicações: $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (d) \Rightarrow (a)$.

(a) ⇒ (b). Suponha que A é invertível e seja $\mathbf{x}_0$ uma solução qualquer de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$; assim, $A\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$. Multiplicando ambos os lados desta equação pela matriz A^{-1} dá $A^{-1}(A\mathbf{x}_0) = A^{-1}\mathbf{0}$, ou então, $(A^{-1}A)\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$, ou ainda, $I\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$, ou $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$. Assim, $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tem somente a solução trivial.

(b) ⇒ (c). Seja $A\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ a forma matricial do sistema

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad\quad \vdots \quad &\quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

e suponha que o sistema só admite a solução trivial. Se nós resolvermos por eliminação de Gauss-Jordan, então o sistema de equações correspondente à forma escalonada reduzida por linhas da matriz aumentada será

$$\begin{aligned} x_1 \quad\quad\quad &= 0 \\ x_2 \quad\quad &= 0 \\ \ddots \quad &\\ x_n &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

Assim, a matriz aumentada

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 \end{bmatrix}$$

de (1) pode ser reduzida à matriz aumentada

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

de (2) por uma seqüência de operações elementares sobre linhas. Se nós desconsiderarmos a última coluna (de zeros) em cada uma destas matrizes, poderemos concluir que a forma escalonada reduzida por linhas de A é I_n.

(c) ⇒ (d). Suponha que a forma escalonada reduzida por linhas de A é I_n, de modo que A pode ser reduzida a I_n por uma seqüência finita de operações elementares sobre linhas. Pelo Teorema 1.5.1, cada uma destas operações pode ser efetuada por uma matriz elementar apropriada. Assim, nós podemos encontrar matrizes elementares $E_1, E_2, \ldots, E_k$ tais que

$$E_k \cdots E_2 E_1 A = I_n \tag{3}$$

Pelo Teorema 1.5.2, as matrizes $E_1, E_2, \ldots, E_k$ são invertíveis. Multiplicando ambos os lados da Equação (3) pela esquerda sucessivamente por $E_k^{-1}, \ldots, E_2^{-1}, E_1^{-1}$, nós obtemos

$$A = E_1^{-1}E_2^{-1} \cdots E_k^{-1} I_n = E_1^{-1}E_2^{-1} \cdots E_k^{-1} \tag{4}$$

Pelo Teorema 1.5.2, esta equação expressa A como um produto de matrizes elementares.

(d) ⇒ (a). Se A é um produto de matrizes elementares, então dos Teoremas 1.4.6 e 1.5.2 segue que a matriz A é um produto de matrizes invertíveis, e portanto invertível. ■

Equivalência por Linhas Se uma matriz B pode ser obtida de uma matriz A efetuando uma seqüência finita de operações elementares sobre linhas, então obviamente podemos recuperar B de volta de A efetuando as inversas destas operações elementares sobre linhas na ordem inversa. As matrizes que podem ser obtidas uma da outra por uma seqüência finita de operações elementares sobre linhas são ditas matrizes ***equivalentes por linhas***. Com esta terminologia, segue das partes (*a*) e (*c*) do Teorema 1.5.3 que uma matriz A de tamanho $n \times n$ é invertível se, e somente se, A é equivalente por linhas à matriz identidade $n \times n$.

Um Método para Inverter Matrizes Como nossa primeira aplicação do Teorema 1.5.3, vamos estabelecer um método para determinar a inversa de uma matriz invertível. Multiplicando (3) pela direita por A^{-1}, dá

$$A^{-1} = E_k \cdots E_2 E_1 I_n \tag{5}$$

que informa que A^{-1} pode ser obtida multiplicando I_n sucessivamente à esquerda pelas matrizes elementares $E_1, E_2, \ldots, E_k$. Como cada multiplicação à esquerda por uma destas matrizes elementares efetua uma operação sobre linhas, resulta, comparando as Equações (3) e (5), que *a seqüência de operações elementares sobre linhas que reduz A a I_n também reduz I_n a A^{-1}*. Assim, temos o seguinte resultado:

Para encontrar a inversa de uma matriz invertível A, nós devemos encontrar uma seqüência de operações elementares sobre linhas que reduz A à identidade e depois efetuar esta mesma seqüência de operações em I_n para obter A^{-1}.

Um método simples para executar este procedimento é dado no próximo exemplo.

EXEMPLO 4 Usando Operações sobre Linhas para Encontrar A^{-1}

Encontre a inversa de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Solução.

Nós queremos reduzir A à matriz identidade por operações sobre linhas e simultaneamente aplicar estas operações a I para produzir A^{-1}. Para conseguir isto, nós vamos adjuntar a matriz identidade à direita de A, com isto produzindo uma matriz da forma

$$[A \mid I]$$

Em seguida nós iremos aplicar operações sobre linhas desta matriz até que o lado esquerdo esteja reduzido a I; estas operações vão converter o lado direito a A^{-1}, de modo que a matriz final terá a forma

$$[I \mid A^{-1}]$$

As contas são as seguintes:

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \longleftarrow$$

Nós somamos −2 vezes a primeira linha à segunda e −1 vezes a primeira à terceira.

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right] \longleftarrow$$

Nós somamos 2 vezes a segunda linha à terceira.

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right] \longleftarrow$$

Nós multiplicamos a terceira linha por −1.

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 0 & -14 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right] \longleftarrow$$

Nós somamos 3 vezes a terceira linha à segunda e −3 vezes a terceira à primeira.

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right] \longleftarrow$$

Nós somamos −2 vezes a segunda linha à primeira.

Assim,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

◆

Muitas vezes nós não sabemos, de antemão, se uma dada matriz é ou não invertível. Se uma matriz A de tamanho $n \times n$ não é invertível, então ela não pode ser reduzida a I_n por operações elementares sobre linhas [parte (*c*) do Teorema 1.5.3]. Dito de outra maneira, a forma escalonada reduzida por linhas de A tem pelo menos uma linha de zeros. Assim, se o procedimento do último exemplo for tentado em uma matriz que não é invertível, então em algum ponto das contas vai aparecer uma linha de zeros *no lado esquerdo*. Pode-se então concluir que a dada matriz não é invertível e parar as contas.

EXEMPLO 5 Mostrando que uma Matriz não É Invertível

Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Aplicando o procedimento do Exemplo 4 dá

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -9 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 9 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \longleftarrow$$

Nós somamos −2 vezes a primeira linha à segunda e somamos a primeira à terceira.

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -9 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \longleftarrow$$

Nós somamos a segunda linha à terceira.

Como obtivemos uma linha de zeros no lado esquerdo, A não é invertível. ◆

EXEMPLO 6 Uma Conseqüência da Invertibilidade

No Exemplo 4 nós mostramos que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

é uma matriz invertível. Do Teorema 1.5.3 segue que o sistema homogêneo

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 0 \\ x_1 \quad\quad\;\; + 8x_3 &= 0 \end{aligned}$$

tem somente a solução trivial. ◆

Conjunto de Exercícios 1.5

1. Quais das seguintes matrizes são elementares?

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (g) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2. Encontre uma operação sobre linhas que retorna a matriz elementar dada a uma matriz identidade.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & -7 & -1 \\ 8 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 5 \\ 2 & -7 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & -7 & -1 \\ 2 & -7 & 3 \end{bmatrix}$$

Encontre matrizes elementares E_1, E_2, E_3 e E_4 tais que

(a) $E_1A = B$ (b) $E_2B = A$ (c) $E_3A = C$ (d) $E_2C = A$

4. No Exercício 3, é possível encontrar uma matriz elementar E tal que $E\,B = C$? Justifique sua resposta.

Nos Exercícios 5–7, use o método mostrado nos Exemplos 4 e 5 para encontrar a inversa da matriz dada se a matriz é invertível e confira sua resposta por multiplicação.

5. (a) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

6. (a) $\begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & 1 \\ -4 & 2 & -9 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 2 & 6 & 6 \\ 2 & 7 & 6 \\ 2 & 7 & 7 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

7. (a) $\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{1}{10} \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 3\sqrt{2} & 0 \\ -4\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} -8 & 17 & 2 & \frac{1}{3} \\ 4 & 0 & \frac{2}{5} & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 13 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & -3 \end{bmatrix}$

8. Encontre a inversa de cada uma das seguintes matrizes 4×4, onde k_1, k_2, k_3, k_4 e k_5 são todos não-nulos.

(a) $\begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_4 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & k_1 \\ 0 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & k_3 & 0 & 0 \\ k_4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 1 & k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k \end{bmatrix}$

9. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

(a) Encontre matrizes elementares E_1 e E_2 tais que $E_2E_1A = I$.
(b) Escreva A^{-1} como um produto de duas matrizes elementares.
(c) Escreva A como um produto de duas matrizes elementares.

10. Em cada parte, efetue a operação sobre linhas dada na matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & -3 \\ 1 & -4 & 7 \end{bmatrix}$$

multiplicando A à esquerda por uma matriz elementar conveniente. Confira sua resposta em cada caso executando a operação sobre linhas diretamente em A.

(a) Permute a primeira e terceira linhas.
(b) Multiplique a segunda linha por $\frac{1}{3}$.
(c) Some duas vezes a segunda linha à primeira.

11. Expresse a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 3 & 8 \\ -2 & -5 & 1 & -8 \end{bmatrix}$$

no formato $A = E\,F\,G\,R$, onde E, F e G são matrizes elementares e R está em forma escalonada por linhas.

12. Mostre que se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & c \end{bmatrix}$$

é uma matriz elementar, então pelo menos uma entrada da terceira linha deve ser um zero.

13. Mostre que

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & f & 0 & g \\ 0 & 0 & 0 & h & 0 \end{bmatrix}$$

é não-invertível para qualquer valor das entradas.

14. Prove que se A é uma matriz $m \times n$, então existe uma matriz invertível C tal que $C\,A$ está em forma escalonada reduzida por linhas.
15. Prove que se A é uma matriz invertível e B é equivalente por linhas a A, então B também é invertível.
16. (a) Prove: Se A e B são matrizes $m \times n$, então A e B são equivalentes por linhas se, e somente se, A e B têm a mesma forma escalonada reduzida por linhas.
(b) Mostre que A e B são equivalentes por linhas e encontre uma seqüência de operações elementares por linhas que produz B a partir de A, sendo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 9 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

17. Prove o Teorema 1.5.1.

Discussão e Descoberta

18. Suponha que A é alguma matriz invertível desconhecida, mas que você conhece uma seqüência de operações elementares por linhas que produz a matriz identidade quando efetuada sucessivamente em A. Explique como você pode usar a informação disponível para encontrar A.
19. Decida se a afirmação dada é sempre verdadeira ou às vezes falsa. Justifique sua resposta dando um argumento lógico ou um contra-exemplo.
(a) Toda matriz quadrada pode ser expressa como um produto de matrizes elementares.
(b) O produto de duas matrizes elementares é uma matriz elementar.
(c) Se A é uma matriz invertível e um múltiplo da primeira linha de A é somado à segunda linha, então a matriz resultante é invertível.
(d) Se A é invertível e $A\,B = 0$, então é necessariamente verdade que $B = 0$.
20. Decida se a afirmação dada é sempre verdadeira ou às vezes falsa. Justifique sua resposta dando um argumento lógico ou um contra-exemplo.
(a) Se A é uma matriz $n \times n$ singular, então $A\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tem infinitas soluções.
(b) Se A é uma matriz $n \times n$ singular, então a forma escalonada reduzida por linhas de A tem pelo menos uma linha de zeros.
(c) Se A^{-1} pode ser expressa como um produto de matrizes elementares, então o sistema linear homogêneo $A\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tem somente a solução trivial.
(d) Se A é uma matriz $n \times n$ singular e B resulta da permutação de duas linhas de A, então B pode ser ou não ser singular.
21. Você acredita que existe uma matriz A de tamanho 2×2 tal que

$$A\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & d \\ a & c \end{bmatrix}$$

para todos valores de a, b, c e d? Explique seu raciocínio.

13. $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{nn}} \end{bmatrix}$ **16.** Não **18.** $C = -A^{-1}BA^{-1}$

19. **(a)** $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

20. **(a)** Um exemplo é $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ **(b)** Um exemplo é $\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. **22.** Sim **23.** $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

31. **(a)** Por exemplo, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ **(b)** $AB + BA$

32. **(a)** O mesmo que 31(a) **(b)** $A^2 - AB + BA - B^2$ **33.** $\begin{bmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{bmatrix}$

34. **(a)** Se A é invertível, então A^T é invertível. **(b)** Verdadeira

35. **(a)** Falsa **(b)** Verdadeira **(c)** Verdadeira **(d)** Falsa (às vezes são iguais)

CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 1.5 [página 59]

1. (a), (c), (d), (f)

2. **(a)** Some três vezes a primeira linha à segunda.
(b) Multiplique a terceira linha por $\frac{1}{3}$.
(c) Permute a primeira com a quarta linha.
(d) Some $\frac{1}{7}$ vezes a terceira linha à primeira.

3. **(a)** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **(c)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **(d)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

4. Não, pois C não pode ser obtida de B por uma única operação sobre linhas.

5. **(a)** $\begin{bmatrix} -7 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} -\frac{5}{39} & \frac{2}{13} \\ \frac{4}{39} & \frac{1}{13} \end{bmatrix}$ **(c)** Não-invertível

6. **(a)** $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{11}{10} & -\frac{6}{5} \\ -1 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{7}{10} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$ **(b)** Não-invertível **(c)** $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ **(d)** $\begin{bmatrix} \frac{7}{2} & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ **(e)** $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

7. **(a)** $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{26} & \frac{-3\sqrt{2}}{26} & 0 \\ \frac{4\sqrt{2}}{26} & \frac{\sqrt{2}}{26} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **(c)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$ **(d)** Não-invertível **(e)** $\begin{bmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{2} & 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$

8. **(a)** $\begin{bmatrix} \frac{1}{k_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{k_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k_4} \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k_4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{k_3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{k_2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{k_1} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **(c)** $\begin{bmatrix} \frac{1}{k} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{k^2} & \frac{1}{k} & 0 & 0 \\ \frac{1}{k^3} & -\frac{1}{k^2} & \frac{1}{k} & 0 \\ -\frac{1}{k^4} & \frac{1}{k^3} & -\frac{1}{k^2} & \frac{1}{k} \end{bmatrix}$

9. **(a)** $E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$, $E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ **(b)** $A^{-1} = E_2E_1$ **(c)** $A = E_1^{-1}E_2^{-1}$

10. **(a)** $\begin{bmatrix} 1 & -4 & 7 \\ 4 & 5 & -3 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & -1 \\ 1 & -4 & 7 \end{bmatrix}$ **(c)** $\begin{bmatrix} 10 & 9 & -6 \\ 4 & 5 & -3 \\ 1 & -4 & 7 \end{bmatrix}$ **11.** $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

16. **(b)** Some – 1 vezes a primeira linha à segunda.
Some – 1 vezes a primeira linha à terceira.
Some – 1 vezes a segunda linha à primeira.
Some a segunda linha à terceira.

19. **(a)** Falsa **(b)** Falsa **(c)** Verdadeira **(d)** Verdadeira

20. **(a)** Verdadeira **(b)** Verdadeira **(c)** Verdadeira **(d)** Falsa

21. Em geral, não. Tente $b = 1$, $a = c = d = 0$.

CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 1.6 [página 64]

1. $x_1 = 3, x_2 = -1$ **2.** $x_1 = -3, x_2 = -3$ **3.** $x_1 = -1, x_2 = 4, x_3 = -7$

4. $x_1 = 1, x_2 = -11, x_3 = 16$ **5.** $x_1 = 1, x_2 = 5, x_3 = -1$

6. $w = -6, x = 1, y = 10, z = -7$ **7.** $x_1 = 2b_1 - 5b_2, x_2 = -b_1 + 3b_2$

8. $x_1 = -\frac{15}{2}b_1 + \frac{1}{2}b_2 + \frac{5}{2}b_3, x_2 = \frac{1}{2}b_1 + \frac{1}{2}b_2 - \frac{1}{2}b_3, x_3 = \frac{5}{2}b_1 - \frac{1}{2}b_2 - \frac{1}{2}b_3$

9. **(a)** $x_1 = \frac{16}{3}, x_2 = -\frac{4}{3}, x_3 = -\frac{11}{3}$ **(b)** $x_1 = -\frac{5}{3}, x_2 = \frac{5}{3}, x_3 = \frac{10}{3}$
(c) $x_1 = 3, x_2 = 0, x_3 = -4$

11. **(a)** $x_1 = \frac{22}{17}$, $x_2 = \frac{1}{17}$ **(b)** $x_1 = \frac{21}{17}$, $x_2 = \frac{11}{17}$

12. **(a)** $x_1 = -18$, $x_2 = -1$, $x_3 = -14$ **(b)** $x_1 = -\frac{421}{2}$, $x_2 = -\frac{25}{2}$, $x_3 = -\frac{327}{2}$

13. **(a)** $x_1 = \frac{7}{15}$, $x_2 = \frac{4}{15}$ **(b)** $x_1 = \frac{34}{15}$, $x_2 = \frac{28}{15}$ **(c)** $x_1 = \frac{19}{15}$, $x_2 = \frac{13}{15}$ **(d)** $x_1 = -\frac{1}{5}$, $x_2 = \frac{3}{5}$

14. **(a)** $x_1 = 18$, $x_2 = -9$, $x_3 = 2$ **(b)** $x_1 = -23$, $x_2 = 11$, $x_3 = -2$
(c) $x_1 = 5$, $x_2 = -2$, $x_3 = 0$

15. **(a)** $x_1 = -12 - 3t$, $x_2 = -5 - t$, $x_3 = t$ **(b)** $x_1 = 7 - 3t$, $x_2 = 3 - t$, $x_3 = t$

16. $b_1 = 2b_2$ **17.** $b_1 = b_2 + b_3$ **18.** Nenhuma restrição **19.** $b_1 = b_3 + b_4, b_2 = 2b_3 + b_4$

21. $X = \begin{bmatrix} 11 & 12 & -3 & 27 & 26 \\ -6 & -8 & 1 & -18 & -17 \\ -15 & -21 & 9 & -38 & -35 \end{bmatrix}$