AS FORMAS QUADRÁTICAS NO PLANO: CLASSIFICAÇÃO DAS CÔNICAS

Profª. Drª. Ana Maria Luz Fassarella do Amaral

Cônicas

Definição:

Uma cônica em $\boldsymbol{R^2}$ é um conjunto de pontos cujas coordenadas em relação à base canônica satisfazem a equação:

$$\boldsymbol{Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0} \ \textbf{(1)}$$

onde A ou B ou C $\neq 0$

Note que esta equação pode ser escrita na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{D} & \boldsymbol{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{bmatrix} + \boldsymbol{F} = \boldsymbol{0} \quad \textbf{(2)}$$

Note que a primeira matriz da equação (2) é simétrica. Logo, pela definição a seguir, ela corresponde a um operador autoadjunto.

Definição:

Seja V um espaço vetorial com produto interno, a uma base ortonormal e T:V→V um operador linear. Então T é chamado um operador autoadjunto se $[T]_{\alpha}^{\alpha}$ é uma matriz simétrica.

A seguir, um importante resultado, o Teorema Espectral, nos dirá em que condições existe uma base ortogonal do R^2 composta por autovetores de T, isto é, quando o operador é diagonalizável.

Teorema Espectral

Seja <,> um produto interno em R^n. Se T: $R^n \to R^n$ é um operador autoadjunto, então existe uma base ortogonal de R^n composta por autovetores de T.

De acordo com o Lema a seguir, temos que quando existe tal base de autovetores, $[T]_{\beta}^{\beta}$ é diagonal.

Lema:

Um operador T: V→V admite uma base β em relação a qual a matriz $[T]_{\beta}^{\beta}$ é diagonal se, e somente se essa base β for formada por autovetores de T.

Portanto, a matriz simétrica da equação (2) é diagonalizável.

Para ilustrar o processo, determinaremos que figura a cônica a seguir representa:

$$\mathbf{2x^2 + 2y^2 + 2xy + 7\sqrt{2x} + 5\sqrt{2}y + 10 = 0 \ (3)}$$

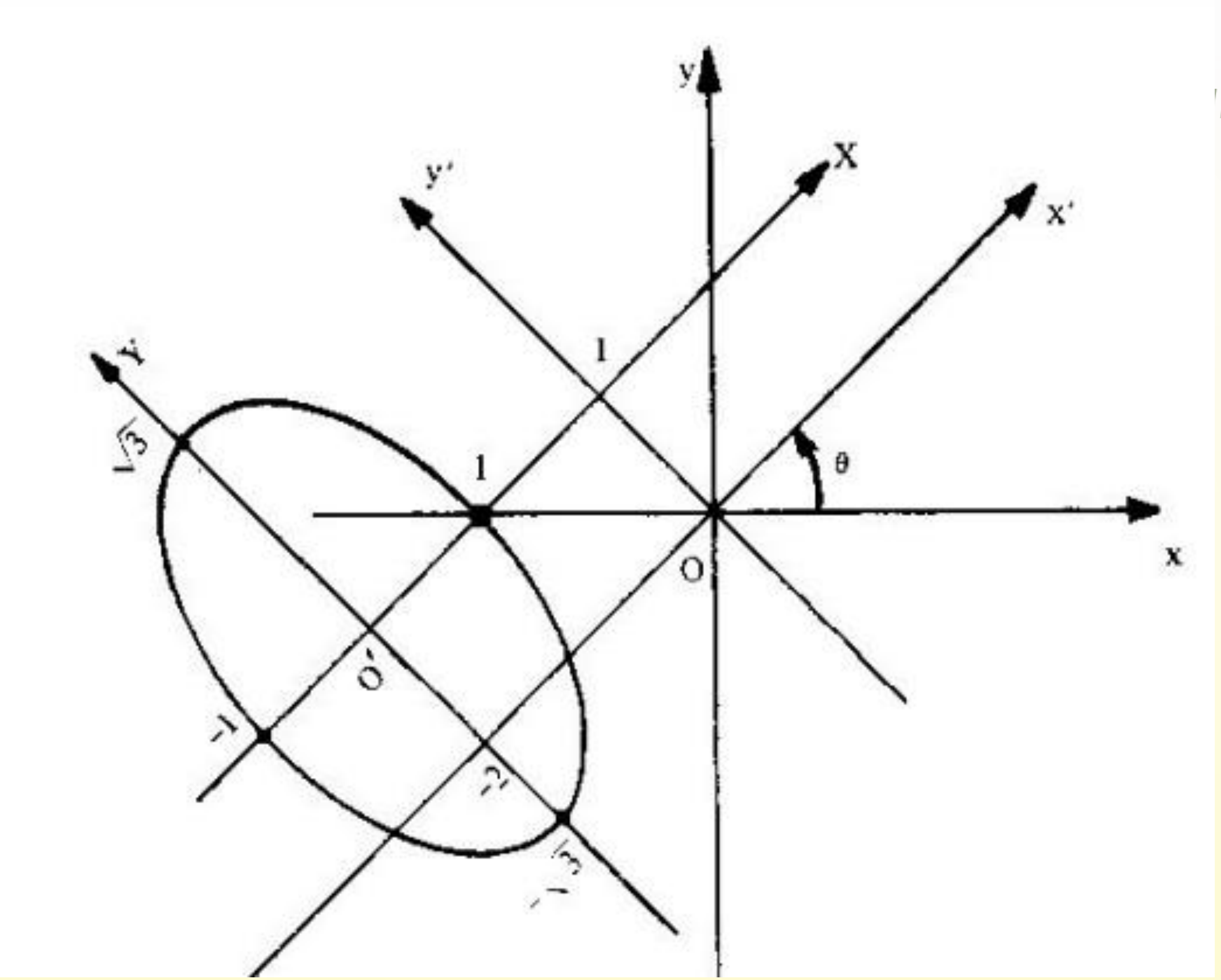

Figura 1

Classificação das Cônicas

Consideremos novamente a equação (1) e sua forma matricial (2):

$$\boldsymbol{Ax^2 + 2Bxy + \mathrm{C}y^2 + Dx + Ey + F = 0} \quad \textbf{(1)}$$

$$[x \quad y]\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{bmatrix} + [\boldsymbol{D} \quad \boldsymbol{E}]\begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{bmatrix} + \boldsymbol{F} = \boldsymbol{0} \quad \textbf{(2)}$$

Seguindo o procedimento mostrado no exemplo pode-se escrevê-la da seguinte forma:

$[x_1 \quad y_1]\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + [D \quad E]$ [illegible]

Dessa forma temos:

$$\boldsymbol{\lambda_1 x_1}^2 + \boldsymbol{\lambda_2 y_1}^2 + \tilde{d}\boldsymbol{x_1} + \tilde{e}\,\boldsymbol{y_1} + \boldsymbol{F} = \mathbf{0} \quad \textbf{(5)}$$

Completando quadrados e fazendo as mudanças de variável adequadas, obtemos:

I. **Para λ_1 e $\lambda_2 \neq 0$:** $\lambda_1 x_2{}^2 + \lambda_2 y_2{}^2 + f = 0$ **(6)**

II. **Para $\lambda_1 \neq 0$ e $\lambda_2 = 0$:** $\lambda_1 x_2{}^2 + a y_2 + f = 0$ **(7)**

Caso I: $\lambda_1 {x_2}^2 + \lambda_2 {y_2}^2 + f = 0$

i. $\boldsymbol{\lambda_1}$, $\boldsymbol{\lambda_2}$ **e** $\boldsymbol{f}$ **têm o mesmo sinal: têm-se o conjunto vazio**

ii. $\boldsymbol{\lambda_1}$**e** $\boldsymbol{\lambda_2}$ **têm o mesmo sinal, que é diferente do sinal de** $\boldsymbol{f}$**: têm-se uma elipse**

iii. $\boldsymbol{\lambda_1}$**e** $\boldsymbol{\lambda_2}$ **têm sinais opostos: têm-se uma hipérbole para** $\boldsymbol{f \neq 0}$ **e um par de retas concorrentes para** $\boldsymbol{f = 0}$

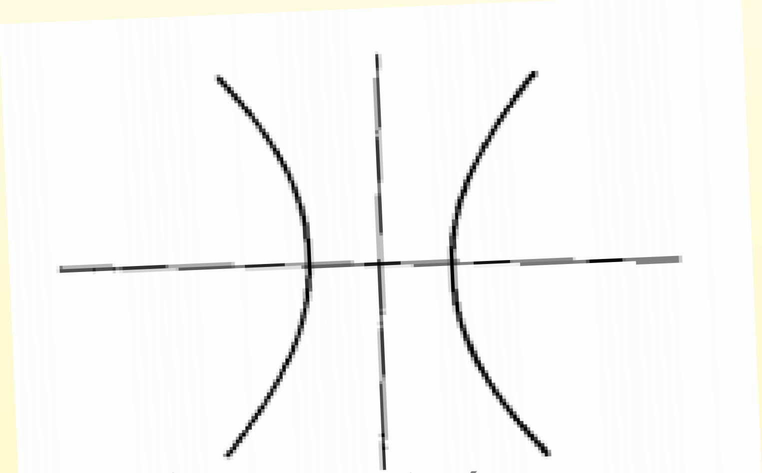

Figura 2: hipérbole

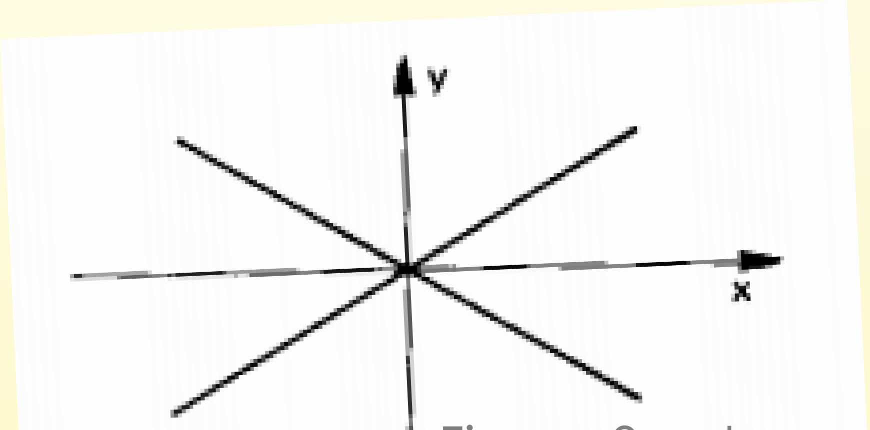

Figura 3: retas concorrentes

Caso II: $\lambda_1 {x_2}^2 + a y_2 + f = 0$

i. **$a \neq 0$: têm-se uma parábola**

ii. **$a = 0$: têm-se um par de retas paralelas para λ_1 e f com sinais opostos e o conjunto vazio para λ_1 e f com sinais iguais**

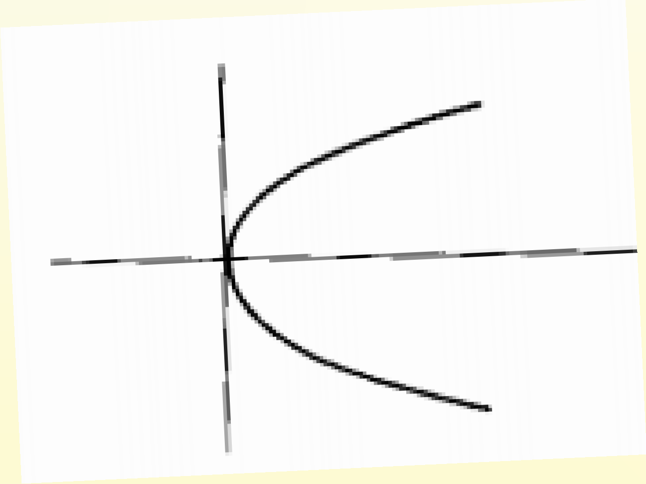

Figura 4: parábola

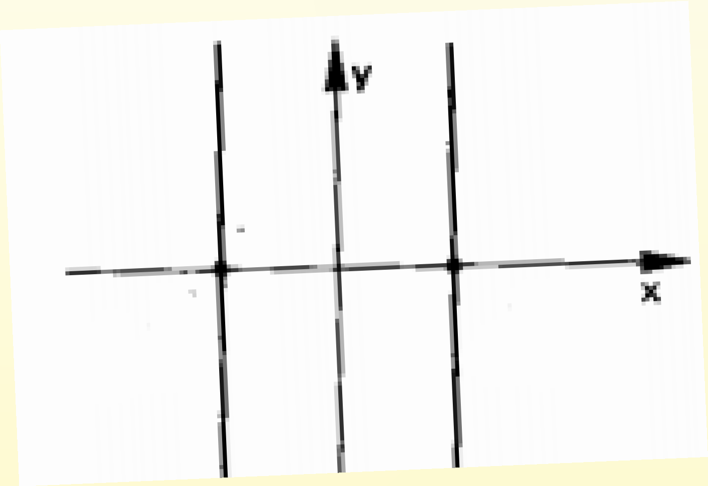

Figura 5: retas paralelas

Bibliografia:

1) Boldrini, J. L. et al. Álgebra Linear. 3ª ed. São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1980.

2) Callioli, C. A. et al. Álgebra Linear e Aplicações. 6ª ed. São Paulo: Atual, 1990.

3) Colombo, J; Koiller, J. Notas de Álgebra Linear (Texto em fase de preparação). Disponível em: http://w3.impa.br/~koiller/NotasAlgLinear/NotasColomboKoiller.EM_PREPARACAO.pdf

4) Steinbruch, A.; Winterle, P. Álgebra Linear. 2ª ed. São Paulo: Pearson Mokron Books, 1987