

O TEOREMA ESPECTRAL E AS FORMAS QUADRÁTICAS NO PLANO: CLASSIFICAÇÃO DAS CÔNICAS



Eduardo Corrêa Pedrosa (monitor)

Prof^a. Dr^a. Ana Maria Luz Fassarella do Amaral (orientadora)

GANP001

Motivação

Este projeto tem como objetivo principal mostrar aos alunos de Álgebra Linear que o estudo das formas quadráticas e classificação das cônicas, um dos últimos conteúdos apresentados na disciplina, é uma aplicação de vários resultados vistos no decorrer do curso. Para obter cônicas na forma reduzida, é feita uma mudança de coordenadas, que por sua vez requer o conhecimento de operações como diagonalização de operadores e resolução de sistemas lineares (homogêneos) e de conceitos como autovalores, autovetores, transformações lineares, bases de um espaço vetorial e ortogonalidade. O Teorema Espectral garante que essa diagonalização é possível. Outro aspecto oportuno consiste no fato de que pode-se prever a classificação da cônica em questão através dos autovalores obtidos no processo de diagonalização. Será realizado um exemplo para melhor ilustrar o procedimento em pauta.

Cônicas

Definição:

Uma cônica em \mathbf{R}^2 é um conjunto de pontos cujas coordenadas em relação à base canônica satisfazem a equação:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (1)$$

onde A ou B ou $C \neq 0$

Note que esta equação pode ser escrita na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + F = 0 \quad (2)$$

Note que a primeira matriz da equação (2) é simétrica. Logo, pela definição a seguir, ela corresponde a um operador autoadjunto.

Definição:

Seja V um espaço vetorial com produto interno, α uma base ortonormal e $T:V \rightarrow V$ um operador linear. Então T é chamado um operador autoadjunto se $[T]_{\alpha}^{\alpha}$ é uma matriz simétrica.

A seguir, um importante resultado, o Teorema Espectral, nos dirá em que condições existe uma base ortogonal do \mathbf{R}^2 composta por autovetores de T , isto é, quando o operador é diagonalizável.

Teorema Espectral

Seja \langle, \rangle um produto interno em \mathbf{R}^n . Se $T: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ é um operador autoadjunto, então existe uma base ortogonal de \mathbf{R}^n composta por autovetores de T .

De acordo com o Lema a seguir, temos que quando existe tal base de autovetores, $[T]_{\beta}^{\beta}$ é diagonal.

Lema:

Um operador $T: V \rightarrow V$ admite uma base β em relação a qual a matriz $[T]_{\beta}^{\beta}$ é diagonal se, e somente se essa base β for formada por autovetores de T .

Portanto, a matriz simétrica da equação (2) é diagonalizável.

Para ilustrar o processo, determinaremos que figura a cônica a seguir representa:

$$2x^2 + 2y^2 + 2xy + 7\sqrt{2}x + 5\sqrt{2}y + 10 = 0 \quad (3)$$

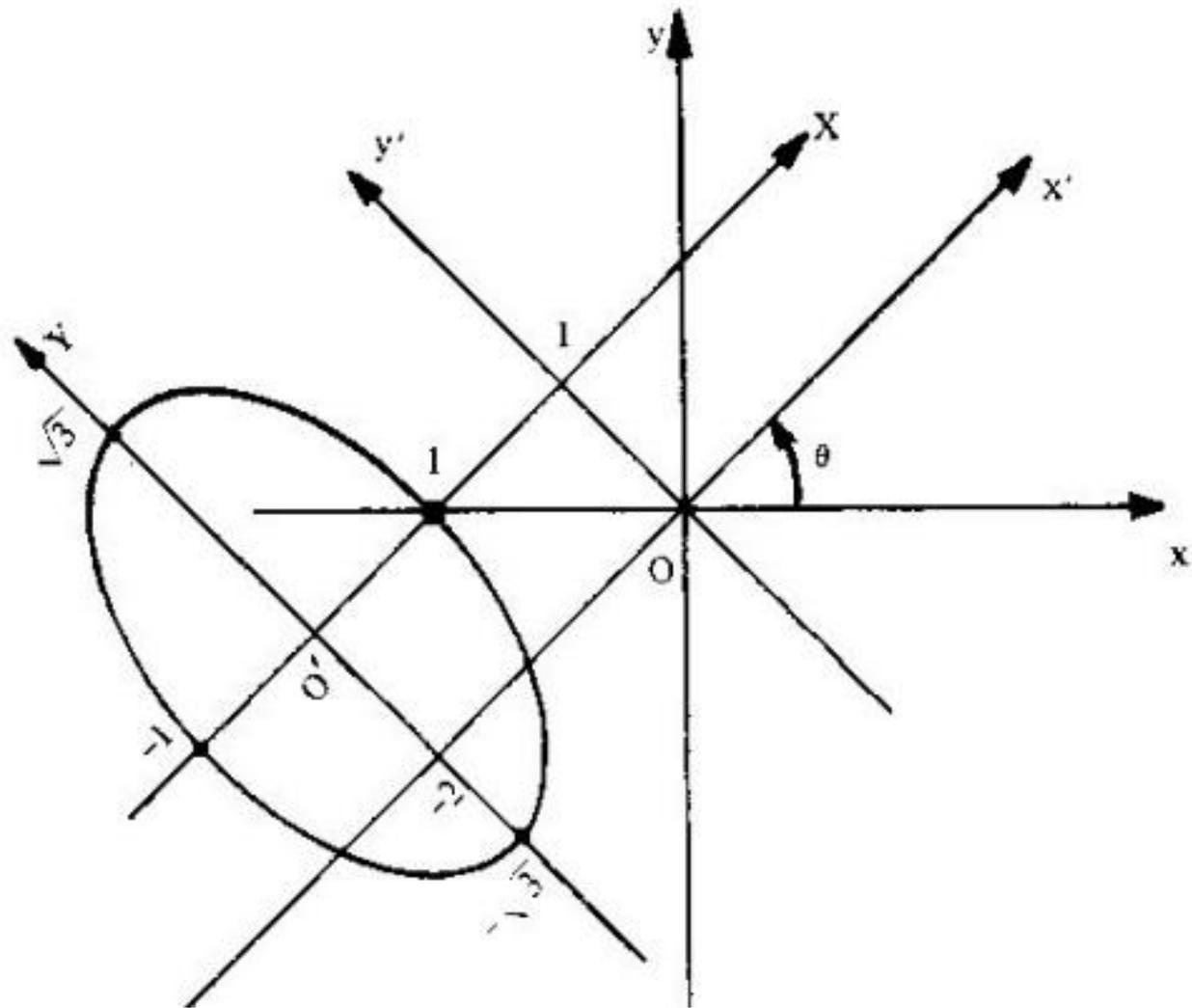


Figura 1

Classificação das Cônicas

Consideremos novamente a equação (1) e sua forma matricial (2):

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + F = 0 \quad (2)$$

Seguindo o procedimento mostrado no exemplo pode-se escrevê-la da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D & E \end{bmatrix} [I]_{\alpha}^{\beta} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + F = 0 \quad (4)$$

Dessa forma temos:

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + ax_1 + by_1 + F = 0 \quad (5)$$

Completando quadrados e fazendo as mudanças de variável adequadas, obtemos:

I. Para λ_1 e $\lambda_2 \neq 0$: $\lambda_1 x_2^2 + \lambda_2 y_2^2 + f = 0$ (6)

II. Para $\lambda_1 \neq 0$ e $\lambda_2 = 0$: $\lambda_1 x_2^2 + ay_2 + f = 0$ (7)

Caso I: $\lambda_1 x_2^2 + \lambda_2 y_2^2 + f = 0$

- i.* λ_1, λ_2 e f têm o mesmo sinal: têm-se o conjunto vazio
- ii.* λ_1 e λ_2 têm o mesmo sinal, que é diferente do sinal de f : têm-se uma elipse
- iii.* λ_1 e λ_2 têm sinais opostos: têm-se uma hipérbole para $f \neq 0$ e um par de retas concorrentes para $f = 0$

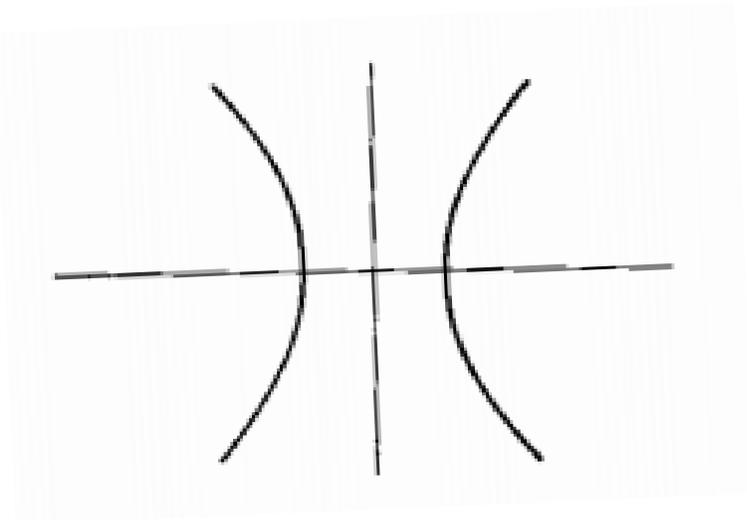


Figura 2: hipérbole

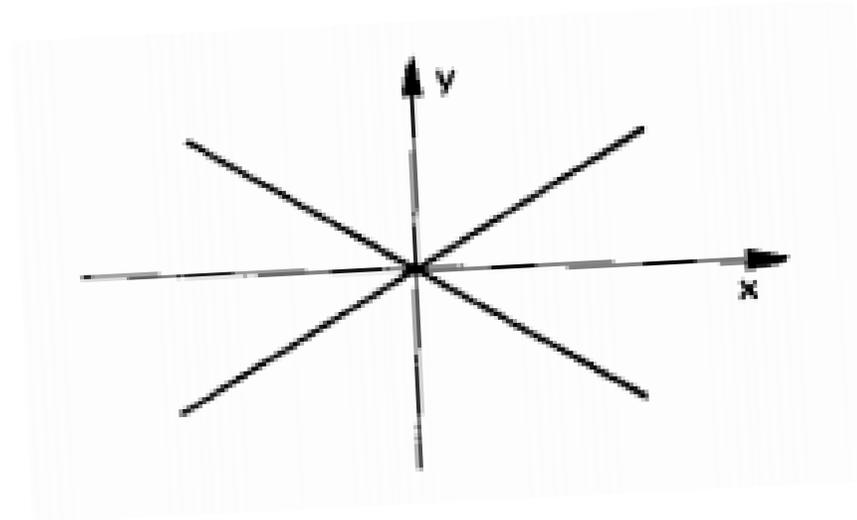


Figura 3: retas concorrentes

Caso II: $\lambda_1 x_2^2 + ay_2 + f = 0$

- i.* $a \neq 0$: têm-se uma parábola
- ii.* $a = 0$: têm-se um par de retas paralelas para λ_1 e f com sinais opostos e o conjunto vazio para λ_1 e f com sinais iguais

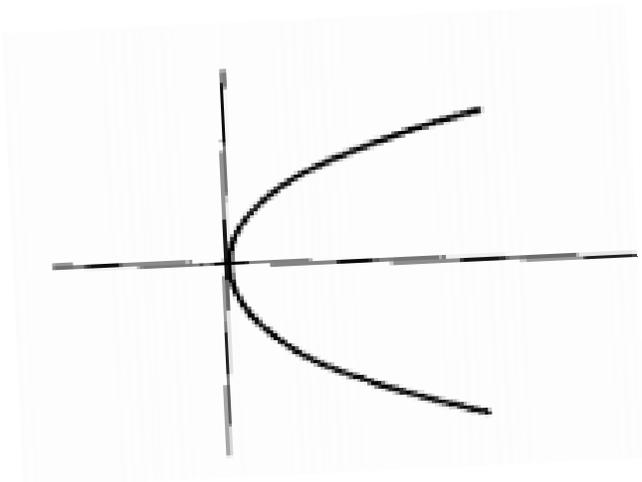


Figura 4: parábola

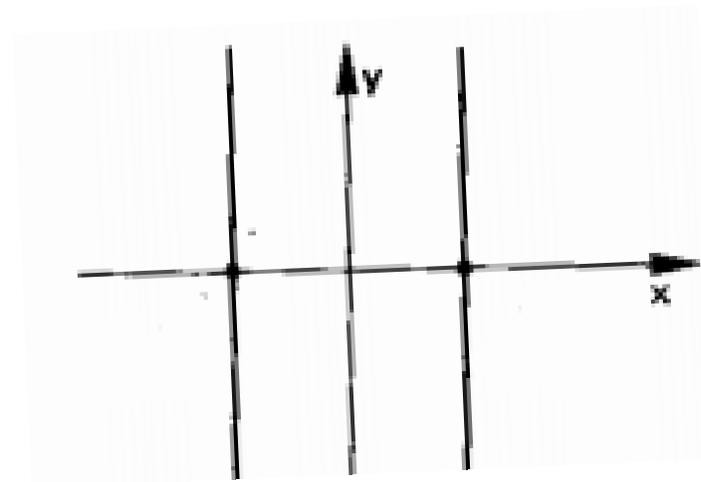


Figura 5: retas paralelas

Bibliografia:

- 1) Boldrini, J. L. et al. Álgebra Linear. 3ª ed. São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1980.
- 2) Callioli, C. A. et al. Álgebra Linear e Aplicações. 6ª ed. São Paulo: Atual, 1990.
- 3) Colombo, J; Koiller, J. Notas de Álgebra Linear (Texto em fase de preparação).
Disponível em:
http://w3.impa.br/~koiller/NotasAlgLinear/NotasColomboKoillerEM_PREPARACAO.pdf
- 4) Steinbruch, A.; Winterle, P. Álgebra Linear. 2ª ed. São Paulo: Pearson Mokron Books, 1987