GAN 00007
Álgebra Linear
Aula 3

Turma A1

Profa. Ana Maria Luz Fassarella do Amaral

Sistemas Lineares

Um homem precisa tomar 5 unidades de vitamina A, 13 unidades de vitamina B, e 23 unidades de vitamina C por dia. Três marcas de vitaminas em comprimidos estão disponíveis e o número de unidades de cada vitamina por comprimido é dado na tabela.

	Vitamina A	Vitamina B	Vitamina C
Marca 1	1	2	4
Marca 2	1	1	3
Marca 3	0	1	1

a) De que formas este indivíduo pode satisfazer suas necessidades vitamínicas usando estas marcas?

b) Se as marcas 1, 2 e 3 custam respectivamente R$ 0,90, R$ 0,60 e R$ 1,50 por comprimido, qual o tratamento mais econômico disponível para este sujeito?

Adaptado de Nicholson, W. K., Álgebra Linear, p. 20

Algoritmo de Gauss

Qualquer matriz pode ser levada à forma escalonada pelo método a seguir:

Passo 1. Se a matriz consiste inteiramente de zeros, pare: ela já se encontra na forma escalonada.

Passo 2. Caso contrário, encontre a primeira coluna, vindo da esquerda, que contém um elemento k não nulo, e mova a linha contendo esse elemento ao topo da matriz.

Passo 3. Multiplique a linha no topo por $\frac{1}{k}$ para obter o primeiro pivô.

Passo 4. Anule cada elemento abaixo do pivô, subtraindo múltiplos de suas linhas das linhas inferiores.

Isso completa a primeira linha; todas as demais operações por linha são efetuadas nas demais linhas.

Passo 5. Repita os passos 1–4 na matriz formada pelas linhas remanescentes.

Observe que o algoritmo de Gauss* é recursivo no seguinte sentido: depois de se obter o primeiro pivô, todo o processo é repetido nas demais linhas. Isso torna fácil de se usar o método no computador. Observe ainda que, no passo 4, podemos também anular cada elemento *acima* do pivô. Nesse caso, o algoritmo leva a matriz à forma escalonada *reduzida* (como nos exemplos 6 e 7). A razão para a distinção entre as duas formas de escalonamento será discutida posteriormente.

Extraído do livro Álgebra Linear de Nicholson, K.

Seja

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

um sistema linear.

Este sistema pode ser representado pela equação matricial

$$Ax = b$$

onde $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ e x é o vetor

que queremos determinar.

A matriz A é chamada de matriz de coeficientes do sistema linear.

A matriz que obtemos quando justapomos o vetor b à direita da matriz A é chamada de matriz aumentada do sistema:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Posto de uma matriz

Independente de como é feito o escalonamento de uma matriz, a matriz escalonada resultante terá sempre a mesma quantidade de pivôs.

Esse número de pivôs (que é o número de linhas não-nulas da matriz) é chamado de **POSTO DA MATRIZ**

Voltando...

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Observe as matrizes acima.
Como podemos decidir se um sistema tem ou não solução, e caso tenha, se há apenas uma ou infinitas soluções a partir da observação das matrizes aumentadas na forma escalonada?

Tente redigir suas observações utilizando o conceito de posto de uma matriz.

Classificação de sistemas com base no posto

Posto da matriz aumentada > posto da matriz dos coeficientes:

sistema impossível.

Posto da matriz aumentada = posto da matriz dos coeficientes:

sistema possível.

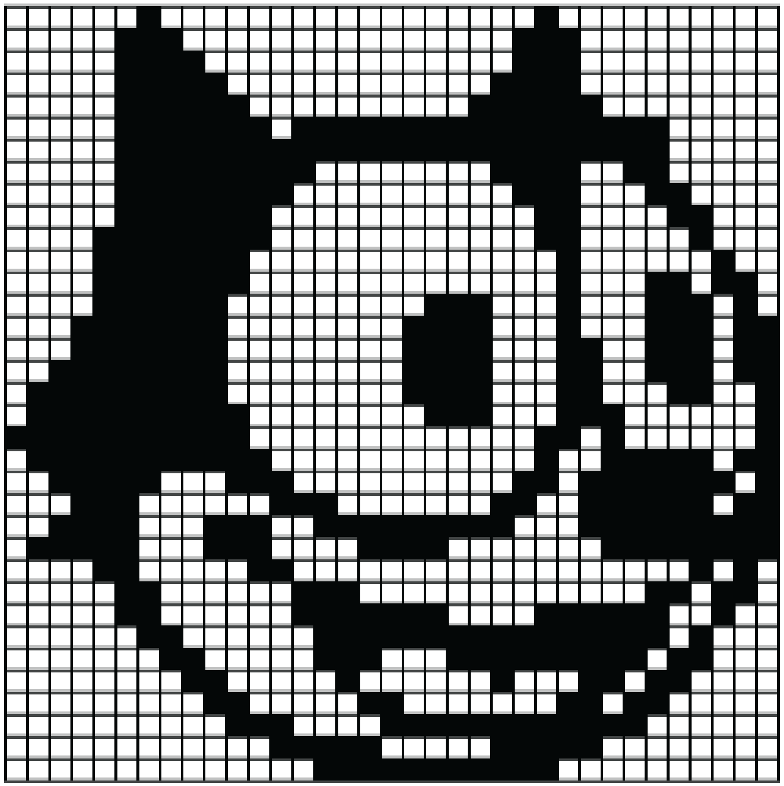
Se o sistema é possível:

Posto = quantidade de incógnitas: sistema determinado.

Posto < quantidade de incógnitas: sistema indeterminado.

Aula 3 – Parte 2
Matrizes

Aplicações de matrizes



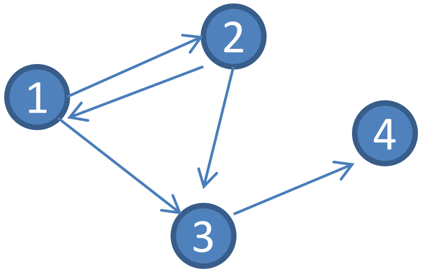
$$
\begin{bmatrix}
1&1&1&1&1&1&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&1&1&0&0&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&1&1&1&0&0&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&0&1&1&1&1&0&0&1&1&1\\
1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&0&1&1&1&1&1&0&1&1&1\\
1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&1&1&1&1&1&1&0&1&1\\
1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&1&1&1&0&0&1&0&0&1\\
1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&1&1&1&0&1&1&1&0&0&0&1&0&1\\
1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&1&1&1&0&1&1&1&0&0&0&1&0&0\\
1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&1&1&1&0&0&1&1&0&0&0&1&0&0\\
1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&1&1&1&0&0&1&1&0&0&0&1&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&1&1&1&0&0&1&1&1&0&0&1&1&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&1&1&1&1&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&0&1&0&1&1&1&1&1&1&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&1&1&0&0&0&0&0&1&0&0\\
1&1&0&0&0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
1&1&1&0&0&0&1&1&1&1&1&1&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\
1&1&0&0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&1&1&1&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&1&0&0&1&1&1&1&1&0&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&1&0&1\\
1&1&1&1&1&0&0&1&1&1&1&1&1&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&0&1&0&0&1\\
1&1&1&1&1&0&0&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&1&1&0&1&1\\
1&1&1&1&1&1&0&0&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&0&0&1&1&1&1&1&0&0&0&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&0&0&1&1&1&1&1&0&1&1&1&1&1&1&0&1&1&1&0&0&1&0&0&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&0&1&1&1&1&1&0&0&1&1&1&1&1&1&1&0&0&1&0&0&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1
\end{bmatrix}
$$

35x35

http://www.cdme.im-uff.mat.br/matrix/matrix-html/matrix-br.html

Aplicações de matrizes

- Fluxos em redes



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Processamento de imagens
- Criptografia
- Manipulação de grande volume de dados (tabelas)
- Otimização

Mas o que é uma matriz?

1. O que é uma matriz?
2. Escreva algumas matrizes. Você sabe identificar qual a ordem delas?
3. Tente montar uma matriz 2x3.
4. O que é uma matriz quadrada? Monte 3 matrizes quadradas de ordens diferentes.
5. Monte uma matriz 3x4. Você sabe qual o elemento (2,3) desta matriz? E qual o elemento (3,2)?
6. O que é uma matriz linha? E uma matriz coluna? Monte um de cada.
7. O que precisa acontecer para que duas matrizes A e B sejam iguais?
8. Você sabe identificar as diagonais principais e secundária de uma matriz quadrada?
9. Se a matriz não for quadrada, podemos falar em diagonal?
10. Você sabe o que é uma matriz diagonal? Monte uma.
11. Você sabe o que é uma matriz triangular superior ou inferior? Monte uma de cada.
12. O que é uma matriz nula?
13. E uma matriz identidade?

Referências:

- Material do curso de Álgebra Linear da Profa.: Anne Michelle Dysman (GAN)