GAN 00007
Álgebra Linear
Aula 4 – Matrizes e Operações Matriciais

Turma A1

Profa. Ana Maria Luz Fassarella do Amaral

Trabalhando nos grupos...

UFF – Departamento de Análise
Profa. Ana Maria Luz F. Amaral
GAN00007 – Introdução à Álgebra Linear -A1– 2019.1

Revendo Matrizes

1. O que é uma matriz?
2. Escreva algumas matrizes. Você sabe identificar qual a ordem delas?
3. Tente montar uma matriz 2x3.
4. O que é uma matriz quadrada? Monte 3 matrizes quadradas de ordens diferentes.
5. Monte uma matriz 3x4. Você sabe qual o elemento (2,3) desta matriz? E qual o elemento (3,2)?
6. O que é uma matriz linha? E uma matriz coluna? Monte um de cada.
7. O que precisa acontecer para que duas matrizes A e B sejam iguais?
8. Você sabe identificar as diagonais principais e secundária de uma matriz quadrada?
9. Se a matriz não for quadrada, podemos falar em diagonal?
10. Você sabe o que é uma matriz diagonal? Monte uma.
11. Você sabe o que é uma matriz triangular superior ou inferior? Monte uma de cada.
12. O que é uma matriz nula?
13. E uma matriz identidade?

Perguntas Interessantes:

1. Uma matriz nula é diagonal?
2. É triangular inferior?
3. É triangular superior?
4. E a matriz identidade, é diagonal?
5. É triangular inferior?
6. É triangular superior?
7. Tem alguma matriz que seja diagonal e não tenha nenhum zero?

Matrizes

Definição 1 (Matriz): Chamamos de Matriz a todo conjunto de "valores", dispostos em linhas e colunas. Representamos matrizes com letras maiúsculas do nosso alfabeto.

Dada uma matriz A denotaremos cada elemento da matriz A por a_{ij} onde i é o número da linha e j é o número da coluna desse elemento.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n}$$

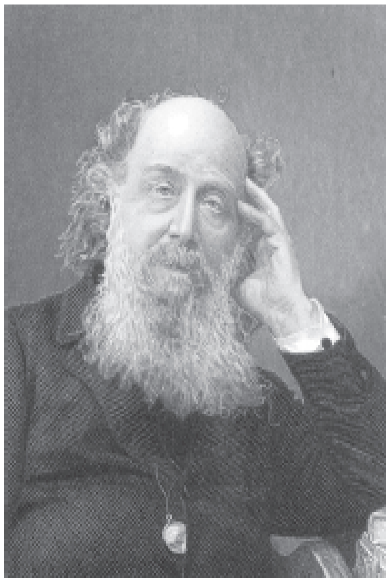
Exemplo: uma matriz genérica 3x2 teria a forma:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

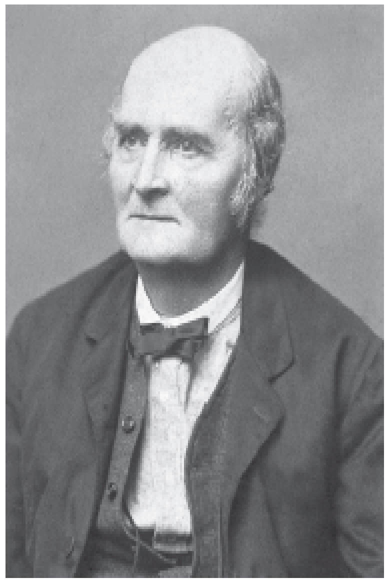
Matrizes-linha e **matrizes-coluna (vetores linha e coluna)** são de importância especial e é prática comum denotá-los por letras minúsculas em negrito em vez de letras maiúsculas. Assim um vetor linha 1xn arbitrário **a** e um vetor coluna mx1 arbitrário **b** podem ser escritos como

$$\mathbf{a} = [a_1 \; a_2 \ldots a_n], \; \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Nota histórica:



James Sylvester
(1814–1897)



Arthur Cayley
(1821–1895)

Nota histórica O termo *matriz* foi usado pela primeira vez pelo matemático inglês James Sylvester, que definiu o termo em 1850 como "um arranjo oblongo de números". Sylvester comunicou seu trabalho com matrizes ao colega matemático e advogado inglês chamado Arthur Cayley, que então introduziu algumas das operações matriciais básicas num livro intitulado *Memoir on the Theory of Matrices* (*Ensaio sobre a Teoria de Matrizes*), publicado em 1858. Como curiosidade, Sylvester nunca se formou, porque, sendo judeu, recusou-se a assinar o exigido juramento à igreja Anglicana. Ele foi nomeado para uma cátedra na University of Virginia, nos Estados Unidos, mas renunciou depois de espancar com sua bengala um aluno que estava lendo um jornal em aula. Sylvester, pensando que havia matado o aluno, fugiu de volta para a Inglaterra no primeiro navio disponível. Felizmente, o aluno não morreu, só estava em choque!

[Imagem: Coleção Granger, Nova York]

Fonte: Álgebra Linear com Aplicações, H. Anton e C. Rorres, Bookman, 2012.

Tipos de Matrizes

Matriz Quadrada: é matriz cujo número de linhas é igual ao de colunas.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 0 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Matriz Identidade: é a matriz quadrada cujos elementos da diagonal principal são iguais a 1 e os demais elementos iguais a zero.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

diagonal principal

Matriz Nula: Chama-se matriz nula a matriz na qual todos os seus elementos são iguais a zero.

$$0=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Matriz Triangular: é matriz cujos elementos localizados acima ou abaixo da diagonal principal são iguais a zero. Se os zeros estão acima da diagonal a matriz é triangular inferior, se estão abaixo da diagonal a matriz é triangular superior

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Triangular inferior

Matriz Diagonal: é a matriz cujos elementos localizados acima e abaixo da diagonal principal são iguais a zero.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Soma, subtração e multiplicação por escalar

1. Você sabe somar ou subtrair duas matrizes?
2. Posso somar ou subtrair quaisquer duas matrizes? Que condições precisam ser satisfeitas para que eu possa somar duas matrizes?
3. Escreva uma matriz A e uma matriz B, ambas 2x3 e calcule A + B e B – A.
4. Agora multiplique A por 3 e B por ½.

Pensando...

- Podemos pensar em uma matriz como uma lista de vetores colunas.
- Por exemplo, considere o seguintes ingredientes que podem ser usados em uma ração:

	feijão	arroz	milho
Carboidrato	21g	74g	23g
Proteínas	9g	10g	2,5g
fibras	9g	12g	3g
gorduras	0g	2g	23g
porção	50g	100g	100g
custo	120	40	30

Monte uma matriz para representar estes dados. Cada coluna deve conter as informações relativas a um ingrediente.

Quais seriam as características de uma ração que fosse composta por duas porções de feijão, duas de arroz e três de milho?

Multiplicação de matriz por vetor

1. Como você calculou as características da ração indicada?
2. Você sabe multiplicar uma matriz por um vetor?
3. Você consegue relacionar o cálculo da ração com a multiplicação de matriz por vetor?

Uma interpretação útil

Gostaríamos de comparar as seguintes rações:

- Ração 1: duas porções de feijão, duas de arroz, três de milho.
- Ração 2: quatro porções de feijão, três de arroz e uma de milho.
- Ração 3: duas porções de feijão, três de arroz e duas de milho.
- Ração 4: quatro porções de feijão, duas de arroz e duas de milho.

	feijão	**arroz**	**milho**
Carboidrato	21g	74g	23g
Proteínas	9g	10g	2,5g
fibras	9g	12g	3g
gorduras	0g	2g	23g
porção	50g	100g	100g
custo	120	40	30

Você poderia usar multiplicação de matriz por vetor para essa comparação?

Multiplicação de matrizes

1. Como você efetuou os cálculos para a comparação das rações?
2. Você sabe multiplicar matrizes?
3. Poderia ter usado multiplicação de matrizes para agilizar estes cálculos?

Multiplicação de matrizes

1. Podemos multiplicar quaisquer duas matrizes A e B? Que condições A e B precisam satisfazer?
2. Você consegue entender no problema da ração porque essa condição precisa ser satisfeita?
3. Quando multiplicamos números a ordem dos fatores não altera o resultado. No caso de matrizes, também podemos trocar a ordem dos fatores na multiplicação? Como você pode interpretar essa limitação no caso do problema da ração?

Nota histórica

Gotthold Eisenstein
(1823–1852)

Nota histórica O conceito de multiplicação matricial é devido ao matemático alemão Gotthold Eisenstein, que introduziu a ideia em torno de 1844, para simplificar o processo de efetuar substituições em sistemas lineares. A ideia, então, foi expandida e formalizada por Cayley em sua obra *Memoir on the Theory of Matrices* (*Ensaio sobre a Teoria de Matrizes*), publicada em 1858. Eisenstein foi um aluno de Gauss, que o qualificou como sendo do nível de Isaac Newton e Arquimedes. Contudo, o potencial de Eisenstein nunca foi realizado, porque viveu doente toda sua vida e faleceu aos 30 anos.

[Imagem: Wikipedia]

- Fonte: Álgebra Linear com Aplicações, H. Anton e C. Rorres, Bookman, 2012.

Propriedades (Soma de Matrizes)

$$1-(A+B)+C=A+(B+C)$$

$$2-A+B=B+A$$

$$3-A+M\ =A$$

$$4-A+A'=0$$

aqui M representa a matriz nula (0) e A’=(-A)

Propriedades (Produto de uma Matriz por um escalar)

$$1 - a.(b.A) = (a.b).A$$

$$2 - a.(A + B) = a.A + a.B$$

$$3 - (a + b).A = a.A + b.A$$

$$4 - 1.A = A$$

Acima a e b são escalares (o **produto de uma matriz A por um escalar b** é a matriz bA obtida pela multiplicação de cada entrada da matriz A por b).

Propriedades (Produto de Matizes)

$$1 - A.(B.C) = (A.B).C$$

$$2 - A.(B + C) = A.B + A.C$$

$$3 - (A + B).C = A.C + B.C$$

$$4 - k(A.B) = A.(k.B) = k.(A.B)$$

$$5 - I.A = A$$

Em geral A.B≠B.A. Acima I é matriz identidade de mesma ordem de A

Matrizes em blocos (particionadas)

Uma matriz pode ser subdividida em blocos ou particionada em matrizes menores inserindo cortes horizontais e verticais entre linhas e colunas. Por exemplo, as seguintes são três partições possíveis de uma matriz 3X4 arbitrária.

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

$$A = \left[\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{r}_3 \end{bmatrix}$$

$$A = \left[\begin{array}{c|c|c|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right] = [\mathbf{c}_1 \quad \mathbf{c}_2 \quad \mathbf{c}_3 \quad \mathbf{c}_4]$$

Multiplicação matricial por colunas e linhas

A partição de matrizes em blocos tem muitas utilidades, uma das quais sendo encontrar uma linha ou coluna específica de um produto matricial A.B sem calcular todo o produto.

j-ésimo vetor coluna de A.B=A.[j-ésimo vetor coluna de B]

i-ésimo vetor linha de A.B=[i-ésimo vetor linha de A].B

Exemplo: Sejam

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -1 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$$

Multiplicação matricial por colunas e linhas

O segundo vetor coluna de A.B pode ser obtido calculando

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1 + 2.(-1) + 4.7 \\ 2.1 + 6.(-1) + 0.7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Segunda coluna de B

Segunda coluna de A.B

Produtos matriciais como combinações lineares

Sejam

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Então

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

Dizemos que o produto A**x** de uma matriz A por um vetor coluna **x** é uma **combinação linear** dos vetores colunas de A com coeficientes provenientes do vetor **x**

Forma matricial de um sistema linear

Considere o sistema linear com m equações e n incógnitas:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \cdots + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + \cdots + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

Podemos substituir m equações deste sistema por uma única equação matricial:

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Forma matricial de um sistema linear

A matriz mx1 à esquerda desta equação pode ser escrita como um produto:

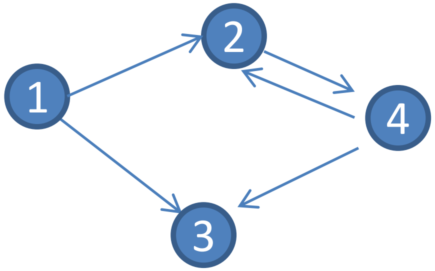
$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{\text{Matriz de coeficientes}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{\text{Matriz-coluna de incógnitas}} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}_{\text{Matriz-coluna de constantes}}$$

Denotando estas matrizes por A, **x** e **b**, respectivamente, o sistema original de m equações e n incógnitas foi substituído pela única equação matricial:

$$\boxed{A\mathbf{x} = \mathbf{b}}$$

Matriz Transposta

1. Você sabe o que é a transposta de uma matriz?
2. Monte uma matriz B de ordem 3x2 e encontre a transposta B^t.
3. Monte a matriz de adjacência A associada ao grafo orientado ao lado.



4. Encontre A^t.
5. Que interpretação você pode dar para essa matriz transposta? Desenhe o grafo associado a ela.

Referências:

- Material do curso de Álgebra Linear da Profa.: Anne Michelle Dysman (GAN)
- Material do slide aula3_PARTE_2_2018_2

do curso de Int. Álgebra Linear 2018.2 da Profa.:

Ana Maria Luz