Aula 6: Determinantes

GAN00007-Introdução à Álg. Linear- A1

2019.1

Profa. Ana Maria Luz F. do Amaral

Determinantes

Relembrando...

Vimos que:

- Se A é 2x2 e $\det(A)\neq 0$ então existe A^{-1};
- Se existe A^{-1} então o sistema linear $Ax=b$ tem solução única ($x= A^{-1}b$).

Podemos concluir que estes conceitos estão relacionados:

Determinantes ~ sistemas lineares ~ invertibilidade

Definição

Determinante é:

- Um número real associado a uma matriz quadrada.
- Uma função real de uma variável matricial, isto é, é uma função que associa um número real a uma matriz quadrada.

$$\det : M_n(IR) \to IR$$
$$A \mapsto \det(A)$$

Como obter o determinante?

- Há várias formas equivalentes de se definir determinante, o que fornece formas alternativas de cálculo, adequadas para diferentes formas de matrizes.

Definição

Seja A uma matriz quadrada. A ***função determinante*** é denotada por ***det*** e nós definimos det (A) como a soma de todos os produtos elementares com sinal de A. O número det (A) é chamado ***determinante de*** A.

Permutações (simples)

Permutar é o mesmo que trocar. Nos problemas de permutação simples, a ideia que fica é de trocar ou embaralhar as posições de todos os elementos. Observe os exemplos:

1) Quantos números de 3 algarismos distintos podemos formar utilizando os algarismos 3, 5 e 7?
Note o uso da palavra "distintos", ou seja, sem repetir o mesmo algarismo.

As possibilidades são:
357, 375, 537, 573, 735 e 753.

Podemos representar também em um "diagrama de árvore":

3 — 5 — 7
3 — 7 — 5
5 — 3 — 7
5 — 7 — 3
7 — 3 — 5
7 — 5 — 3

3 possibilidades | 2 possibilidades | 1 possibilidade

Utilizando o princípio fundamental da contagem, temos:
$3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ possibilidades

Produtos elementares

- Se A é uma matriz nxn, dizemos que um produto de n entradas de A, tais que não há duas da mesma linha ou coluna de A é uma **produto elementar** da matriz A

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

produtos elementares

$$a_{11}a_{22}$$

$$a_{12}a_{21}$$

Como A é 2x2 para construir os produtos elementares devemos ter 2 elementos de linhas distintas, então estamos fazendo uma permutação do conjunto {1,2} nas posições das colunas

$$\boxed{a_{1\_}\,a_{2\_}}$$

Produtos elementares

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

produtos elementares

De quantas maneiras diferentes podemos organizar os elementos do conjunto dos inteiros {1,2,3}?

Como A é 3x3 para construir os produtos elementares devemos ter 3 elementos de linhas distintas, então estamos fazendo uma permutação do conjunto {1,2,3} nas posições das colunas:

$$a_{1\_}\, a_{2\_}\, a_{3\_}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

produtos elementares

$$a_{11}.a_{22}.a_{33}\ ,\ a_{12}.a_{23}.a_{31}\ ,\ a_{13}.a_{21}.a_{32}$$

$$a_{13}.a_{22}.a_{31}\ ,\ a_{12}.a_{21}.a_{33}\ ,\ a_{11}.a_{23}.a_{32}$$

Produto elementar com sinal

Um produto elementar

$$a_{1j_1} a_{2_{j_2}} \ldots a_{n\ j_n}$$

Multiplicado por +1 ou -1 é chamado **produto elementar com sinal** de A. Nós usamos o +1 se $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ é uma permutação par e o –1 se $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ é uma permutação ímpar

Como determinar o sinal do produto elementar:

Uma permutação $(j_1,j_2,...,j_n)$ tem uma **<u>inversão</u>** se um inteiro j_r precede um inteiro menor j_s.

Definição

Uma permutação é chamada ***par*** se o número total de inversões é um inteiro par e é chamada ***ímpar*** se o número total de inversões é ímpar.

Permutação	Número de Inversões	Classificação
(1, 2, 3)	0	par
(1, 3, 2)	1	ímpar
(2, 1, 3)	1	ímpar
(2, 3, 1)	2	par
(3, 1, 2)	2	par
(3, 2, 1)	3	ímpar

Finalmente, o determinante de A é escrito simbolicamente como...

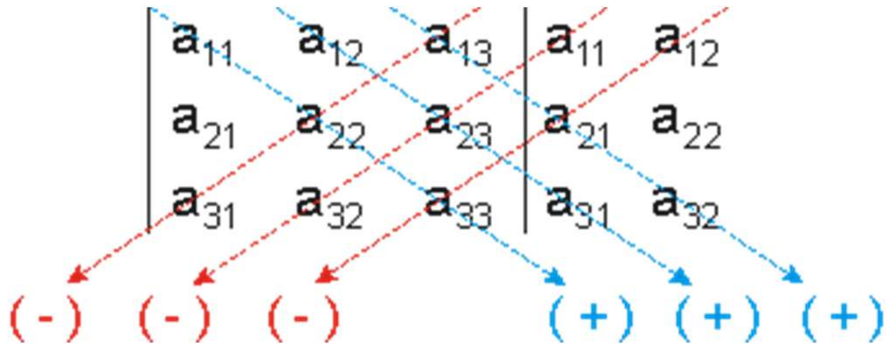
$$\det(A) = \sum \pm\, a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{nj_n}$$

onde o símbolo do somatório indica que os termos devem ser somados sobre todas as permutações ($j_1, j_2, \ldots, j_n$) e o + ou – é selecionado de acordo com a permutação sendo par ou ímpar.

Exemplo: determinante de ordem 3

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{matrix} a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} + a_{13}.a_{21}.a_{32} \\ - a_{13}.a_{22}.a_{31} - a_{12}.a_{21}.a_{33} - a_{11}.a_{23}.a_{32} \end{matrix}$$

Regra de Sarrus:



Propriedades da função determinante

Seja A uma matriz quadrada nxn

D1: O determinante de uma matriz é único.

D2: Se A tem uma linha ou coluna de zeros, então det(A)=0.

D3: det(A)=det(A^T).

D4: Se A é uma matriz triangular então det(A) é o produto das entradas da diagonal principal

$$\det(A) = a_{11} a_{22} \ldots a_{nn}$$

D5: Se B é a matriz que resulta quando uma única linha (ou coluna) de A é multiplicada por um escalar k, então

det(B)=k det(A).

D6: Se B é a matriz que resulta quando duas linhas (ou colunas) de A são permutadas, então

det(B)= - det(A).

Mais propriedades dos determinantes

D7: Se B é a matriz que resulta quando um múltiplo de uma linha de A é somado a uma outra linha de A, ou quando um múltiplo de uma coluna de A é somado a uma outra coluna de A, então

$$\det(B) = \det(A).$$

D8: Se A tem duas linhas proporcionais ou duas colunas proporcionais, então $\det(A)=0$.

Cálculo do determinante por triangularização

As propriedades vistas até agora nos permitem calcular o determinante de uma matriz utilizando as operações elementares.

Exemplo: Calcule det(A) onde $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 9 & 15 \end{bmatrix}$

Observe que:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 9 & 15 \end{bmatrix} \overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\Rightarrow} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 9 & 15 \end{bmatrix} \overset{L_1 \leftarrow \frac{1}{2} L_1}{\Rightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 9 & 15 \end{bmatrix} \overset{L_3 \leftarrow -3L_1 + L_3}{\Rightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\overset{L_3 \leftarrow -3L_2 + L_3}{\Rightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Cálculo do determinante por triangularização

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 9 & 15 \end{bmatrix} \overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\Rightarrow} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 9 & 15 \end{bmatrix} \overset{L_1 \leftarrow \frac{1}{2} L_1}{\Rightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 9 & 15 \end{bmatrix} \overset{L_3 \leftarrow -3 L_1 + L_3}{\Rightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\overset{L_3 \leftarrow -3 L_2 + L_3}{\Rightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 9 & 15 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 9 & 15 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 9 & 15 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -2(-3) = 6$$

Mais propriedades dos determinantes

D9: Sejam A e B matrizes nxn e k um escalar qualquer temos que:

$$\det(kA) = k^n \det(A)$$

Exemplo: $\det(kA) = \begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{vmatrix} = k.\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{vmatrix} = k.k.\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

D10: Sejam A, B, C matrizes nxn que diferem em uma única linha (r-ésima) , suponha que nesta linha para todo j=1,...,n

$$(C)_{rj} = (A)_{rj} + (B)_{rj}$$

então:

$$\det(C) = \det(A) + \det(B)$$

Exemplo: (Quadro)

Mais propriedades dos determinantes

D11: Se B é uma matriz nxn e E é uma matriz elementar nxn então:

$$\det(EB) = \det(E).\det(B)$$

Consequência:

$$\det(E_1 E_2 \ldots E_r B) = \det(E_1).\det(E_2)\ldots\det(E_r).\det(B)$$

D12: Uma matriz quadrada é invertível se, e somente se, det(A)≠0.

D13: Se A e B são matrizes quadradas de mesmo tamanho então:

$$\det(A.B) = \det(A).\det(B)$$

D14: Se A é invertível então: $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$

D15: Se A é ortogonal ($A^{-1}=A^T$) então $\det(A^{-1})=1$ ou -1.

Determinantes, sistemas e invertibilidade

Teorema "do Curso": Se A é uma matriz nxn, então as seguintes afirmações são equivalentes:

a) A é invertível.

b) **Ax=0** só tem a solução trivial.

c) A forma escalonada reduzida por linhas de A é I_n.

d) A pode ser expressa como um produto de matrizes elementares.

e) **Ax=b** é consistente para cada vetor coluna **b** de tamanho nx1.

f) **Ax=b** tem exatamente uma solução para cada vetor coluna **b** nx1.

g) $\det(A) \neq 0$.

Expansão por Cofator

Já vimos a fórmula pela qual definimos o determinante. Contudo, ela não nos fornece um método que seja prático para o cálculo dos determinantes. Vamos ver um método que simplifica este trabalho.

$$det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi$$

$$= a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg)$$

$$= a \det \begin{bmatrix} e & f \\ h & i \end{bmatrix} - b \det \begin{bmatrix} d & f \\ g & i \end{bmatrix} + c \det \begin{bmatrix} d & e \\ g & h \end{bmatrix}$$

Exemplo: Use o método acima para calcular o determinante a seguir: $\det \begin{bmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

Poderíamos ter usado a segunda linha em vez da primeira, colocando em evidência os elementos *d*, *e* e *f* (em vez de *a*, *b* e *c*), contudo é importante atentar para os sinais:

$$det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi = -d(bi - ch) + e(ai - cg) - f(ah - bg)$$

$$= -d \det \begin{bmatrix} b & c \\ h & i \end{bmatrix} + e \det \begin{bmatrix} a & c \\ g & i \end{bmatrix} - f \det \begin{bmatrix} a & b \\ g & h \end{bmatrix}$$

Expansão por Cofator

$$\begin{bmatrix} +1 & -1 & +1 & -1 & \cdots \\ -1 & +1 & -1 & +1 & \cdots \\ +1 & -1 & +1 & -1 & \cdots \\ -1 & +1 & -1 & +1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

Essa matriz nos dá um diagrama que ajuda a identificar o sinal a ser usado em cada parcela da expansão.

Terminologia: Seja A uma matriz nxn. Denotando por $A_{i,j}$ a matriz que obtemos quando retiramos de A a linha i e a coluna j, definimos o **cofator (i,j)** de A como:

$$C_{i,j}(A) = (-1)^{i+j} \det(A_{i,j}) \text{ para cada } i \text{ e } j.$$

Para calcular o determinante de uma matriz A quadrada podemos utilizar o método a seguir:

1. Escolhemos uma linha ou coluna de A;
2. Multiplicamos cada elemento desta linha ou coluna pelo cofator a ele associado;
3. Somamos todos os produtos obtidos.
4. O resultado desta soma será o determinante de A.

Este método é conhecido como expansão por cofatores ou expansão de Laplace.

Expansão em cofatores

Teorema: O determinante de uma matriz A (nxn) pode ser obtido pela soma dos produtos dos elementos de uma fila qualquer (linha ou coluna) da matriz A pelos respectivos cofatores. Estas somas são denominadas expansões em cofatores de det(A).

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \ldots + a_{in}C_{in}$$

(expansão em cofatores ao longo da linha i)

$$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \ldots + a_{nj}C_{nj}$$

(expansão em cofatores ao longo da coluna j)

Exercício 1 Calcule usando o método dos cofatores

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

2 A expansão em cofatores pode ser usada em conjunto com as operações elementares para o cálculo dos determinantes. Use esta idéia no cálculo abaixo

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \\ 3 & 7 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$