GAN00007 – Introdução à Álgebra Linear -A1– 2019.1
Profa. Ana Maria Luz F. Amaral

Lista 2

"Jamais considere seus estudos como uma obrigação, mas como uma oportunidade invejável para aprender a conhecer a influência libertadora da beleza do reino do espírito, para seu próprio prazer pessoal e para proveito da comunidade à qual seu futuro trabalho pertencer"
(Albert Einstein)

1. Para você, quais palavras estão relacionadas ao processo de aprender?

2. Verifique se os produtos abaixo estão bem definidos e, em caso afirmativo, calcule-os.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 1/3 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1/2 \\ 2 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & -1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

3. Uma matriz quadrada A se diz simétrica se $A^T = A$ e anti-simétrica se $A^T = -A$.

(a) Mostre que a soma de duas matrizes simétricas é também simétrica e que o mesmo ocorre para matrizes anti-simétricas.
(b) O produto de duas matrizes simétricas de ordem n é também uma matriz simétrica? Justifique sua resposta.

4. Determine números reais a e b para que a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & a-b \\ a+b & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ seja simétrica.

5. a) Verifique que as matrizes da forma X $= \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & -1 \end{pmatrix}, c \in \Re,$ satisfazem a igualdade $X^2 = I$, onde I é a matriz identidade de ordem 2. Dizemos que as matrizes da forma X são raízes quadradas da matriz identidade I.
b) Determine todas as raízes quadradas da matriz identidade I de ordem 2.

6. Se A e B são matrizes reais de ordem 2 que comutam com a matriz
X = $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, isto é, AX = XA e BX = XB. Mostre que AB = BA.

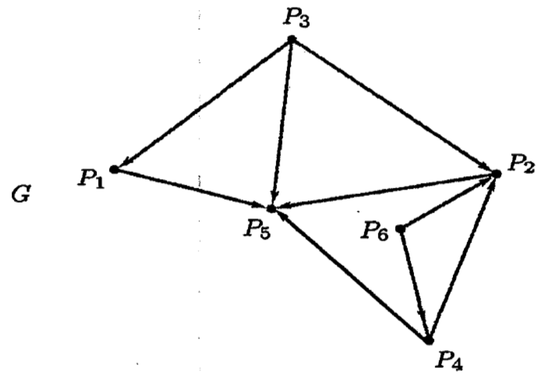
7. Diga se são verdadeiras ou falsas as afirmações abaixo. Caso verdadeira prove, caso contrário dê um contra-exemplo.
(a) Se AB = 0, então A = 0 ou B = 0.
(b) Se AB = 0, então B.A=0.
(c) Se pudermos efetuar o produto A.A, então A é uma matriz quadrada.

8. Se A é uma matriz quadrada então o **traço de A**, denotado por tr(A), é definido pela soma das entradas na diagonal principal de A. O traço de A não é definido se A não é uma matriz quadrada. Calcule o Traço da matriz abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 0 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix},$$

9- Um grupo de seis indivíduos se reúne, já algum tempo, em sessões de terapia de grupo. O terapeuta, que não é parte do grupo, traçou o grafo direcionado ao lado para descrever as relações de influência entre os membros do grupo.
Leia as notas abaixo sobre grafos direcionados e modelos em Sociologia e Telecomunicações. Escreva a matriz de adjacência de G e responda:

a) Quem influencia mais pessoas?
b) Quem não influencia ninguém?



Digrafos

Um **grafo direcionado**, ou **digrafo**, é uma coleção finita de pontos chamados **vértices** ou **nós** e uma coleção finita de **arestas orientadas**, cada uma das quais ligando um par ordenado de vértices distintos. Portanto, um digrafo não contém laços. Vamos supor, também, que não existem arestas múltiplas. Observe que a aresta orientada P_iP_j é diferente da aresta orientada P_jP_i. A matriz $A(G)$, cujo (i, j)-ésimo elemento é 1 se existe uma aresta orientada ligando P_i a P_j e igual a zero caso contrário, é a **matriz de adjacência** de G. A matriz de adjacência de um digrafo não é necessariamente simétrica.

Modelos em Sociologia e Telecomunicações

Considere n indivíduos, $P_1, P_2, \ldots, P_n$, alguns dos quais estão relacionados entre si. Suponha que nenhum deles está associado a si próprio. Apresentamos abaixo alguns exemplos deste tipo de relação.

1. P_i tem acesso a P_j. Nesse caso, P_j pode ou não ter acesso a P_i. Por exemplo, muitos telefones de emergência em estradas permitem que um motorista em dificuldades entre em contato com um posto de socorro, mas não permitem que o posto se comunique com o viajante. Esse modelo pode ser representado por um digrafo da seguinte forma. Sejam $P_1, P_2, \ldots, P_n$ os vértices de G. Ligue P_i a P_j por meio de uma aresta orientada se P_i tem acesso a P_j. É importante ter em mente que essa relação não é necessariamente transitiva, isto é, P_i pode ter acesso a P_j e P_j pode ter acesso a P_k sem que P_i tenha acesso a P_k.
2. P_i influencia P_j. Essa situação é idêntica àquela descrita em 1: se P_i influencia P_j, P_j pode ou não influenciar P_i.
3. Dado um par qualquer de indivíduos, P_i e P_j, então ou P_i domina P_j ou P_j domina P_i, mas não ambos. Essa situação é representada por um grafo direcionado completo com n vértices. Tais grafos são muitas vezes denominados **digrafos de dominação**.