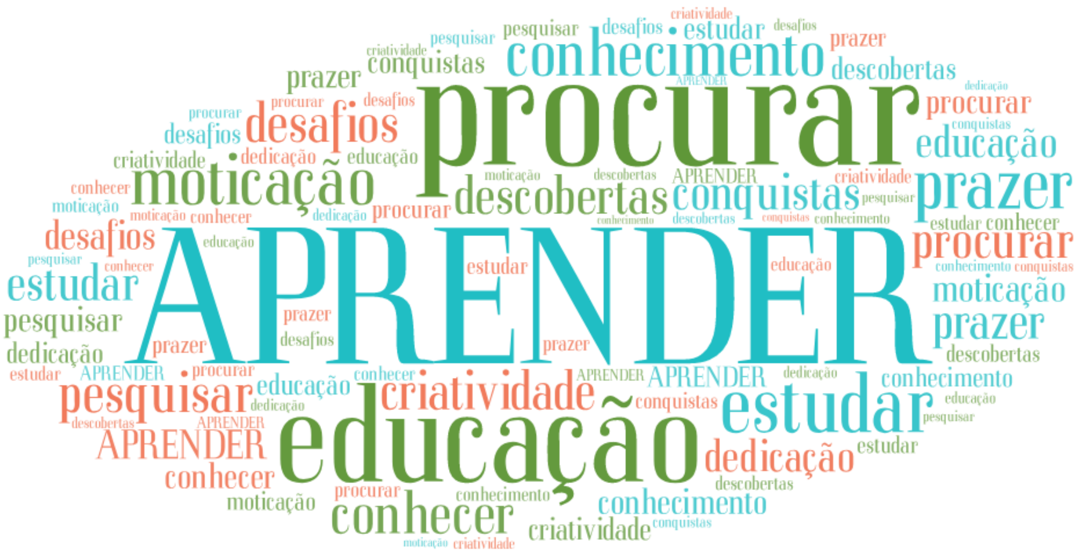
GAN00007 – Introdução à Álgebra Linear -A1– 2019.1
Profa. Ana Maria Luz F. Amaral

Lista 2 – Resolução

1. Sobre a questão para reflexão: *Quais palavras estão relacionadas ao processo de aprender?* Ao lado, algumas que eu pensei. Quais você pensou?



2. Verifique se os produtos abaixo estão bem definidos e, em caso afirmativo, calcule-os.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 1/3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -1/2 \\ 2 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & -1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

Solução.

a) A ordem da primeira matriz é 1x3 e a da segunda é 3x1, logo o produto está bem definido e terá ordem 1x1:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/3 & -2 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 2 \\ -1/2 \\ 2 \end{bmatrix} = [1.2 + 1/3.(-1/2) + (-2).2] = [-13/6]$$

b) A ordem da primeira matriz é 3x1 e a da segunda é 1x3, logo o produto está bem definido e terá ordem 3x3:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$$

c) A ordem da primeira matriz é 2x1 e a da segunda é 2x2, logo o produto matricial não está definido, pois o número de colunas da primeira não coincide com o número de linhas da segunda.

d) A ordem da primeira matriz é 2x2 e a da segunda é 2x1, logo o produto matricial está bem definido e terá ordem 2x1.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

3. Uma matriz quadrada A se diz simétrica se $A^T = A$ e anti-simétrica se $A^T = -A$.

(a) Mostre que a soma de duas matrizes simétricas é também simétrica e que o mesmo ocorre para matrizes anti-simétricas.

(b) O produto de duas matrizes simétricas de ordem n é também uma matriz simétrica? Justifique sua resposta.

Solução.
(a) Sejam A e B duas matrizes simétricas. Desse modo $A^T = A$ e $B^T = B$.
$(A + B)^T = A^T + B^T = A + B$, logo A + B é simétrica.
Analogamente, sejam A e B matrizes anti-simétricas de ordem n, isto é, $A^T = - A$ e $B^T = - B$. Temos $(A + B)^T = A^T + B^T = - A + (- B) = - (A+B)$, logo A + B é uma matriz anti-simétrica de ordem n.

(b) Não. Lembre-se que para mostrar que uma propriedade não é válida, basta exibir um contra exemplo. Assim, considere as seguintes matrizes simétricas:
$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. O produto delas resulta em $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$ que não é simétrica.

4. Determine números reais a e b para que a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & a-b \\ a+b & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ seja simétrica.

Solução.
Para que A seja simétrica, devemos ter $A = A^T$.
$A^T = \begin{pmatrix} 1 & a+b & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ a-b & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Assim, igualando A e A^T:
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & a-b \\ a+b & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+b & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ a-b & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Daí, $\begin{cases} a+b=2 \\ a-b=1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} a = 3/2 \\ b = 1/2 \end{cases}$.

5.
a) Verifique que as matrizes da forma $X = \pm\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & -1 \end{pmatrix}, c \in \Re$, satisfazem a igualdade $X^2 = I$, onde I é a matriz identidade de ordem 2. Dizemos que as matrizes da forma X são raízes quadradas da matriz identidade I.
b) Determine todas as raízes quadradas da matriz identidade I de ordem 2.

Solução.
a) Calculando X^2, temos $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \forall\, c \in \Re$.
b)
Solução 1.
Precisamos determinar A tal que $A^2 = I$.
Seja $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $a,b,c,d \in \Re$. $A^2 = AA = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Assim, temos que resolver o sistema de equações:
$$\begin{cases} a^2+bc=1 \\ ab+bd=0 \\ ac+cd=0 \\ bc+d^2=1 \end{cases} ou \begin{cases} a^2+bc=1 \\ b(a+d)=0 \\ c(a+d)=0 \\ bc+d^2=1 \end{cases}.$$
Esse sistema não é linear, não podemos resolvê-lo da mesma maneira que foi feita no exercício 3. Vamos considerar quatro casos, a partir das equações 2 e 3:

- 1º caso: b = 0 e c = 0. Substituindo no sistema anterior, teremos $a = \pm 1$ e $d = \pm 1$.

Assim, deste caso, temos as soluções $\pm$ I e $\pm\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$.

- 2º caso: b $\neq$ 0 e c $\neq$ 0.

Para que as equações 2 e 3 sejam satisfeitas, a+d=0, o que implica em d = - a.

Da equação 1, bc = 1 – a^2, podemos fazer c = $\frac{1-a^2}{b}$.

Substituindo d = -a na equação 4, chegamos ao mesmo resultado.

Desse caso, temos as soluções $\pm\begin{pmatrix}a & b\\ \frac{1-a^2}{b} & -a\end{pmatrix}$.

- 3º caso: b $\neq$ 0 e c = 0.

Teremos a^2 = 1 e d^2 = 1, o que nos dará a $=\pm 1$ e d$=\pm 1$.

Mas para que a equação b(a+d) = 0 seja satisfeita com b $\neq$ 0, devemos ter a = -d.

Logo, as soluções desse caso são $\pm\begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & -1\end{pmatrix}$.

- 4º caso: b = 0 e c $\neq$ 0.

Teremos novamente a^2 = 1 e d^2 = 1, o que nos dará a $=\pm 1$ e d$=\pm 1$.

Mas para que a equação b(a+d) = 0 seja satisfeita com c $\neq$ 0, devemos ter a = -d.

Desse caso, temos as soluções $\pm\begin{pmatrix}1 & 0\\ c & -1\end{pmatrix}$.

Note que as soluções $\pm\begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ são contempladas nas soluções do 2º caso fazendo a=1. Portanto, as soluções serão as matrizes:

$$\boxed{\pm I,\ \pm\begin{pmatrix}a & b\\ \frac{1-a^2}{b} & -a\end{pmatrix}, b\neq 0 \text{ e } \pm\begin{pmatrix}1 & 0\\ c & -1\end{pmatrix}, c\in\Re^*.}$$

Solução 2. Se a+d = 0 $\Rightarrow$ d = -a $\Rightarrow$ bc + a^2 = 1 $\Rightarrow$

(a) Se b $\neq$ 0, teremos c = $\frac{1-a^2}{b}$.

Desse subcaso, resultam as soluções do tipo $\pm\begin{pmatrix}a & b\\ \frac{1-a^2}{b} & -a\end{pmatrix}$.

(b) Se b = 0, teremos a^2 = 1 $\Rightarrow$ a = $\pm$1. Veja que c $\in$ IR.

Deste subcaso, resultam as soluções do tipo $\pm\begin{pmatrix}1 & 0\\ c & -1\end{pmatrix}$.

2º caso. Se a+d $\neq$ 0 $\Rightarrow$ b=c=0 $\Rightarrow$ a^2 = 1 e d^2 = 1, o que nos dará a $=\pm 1$ e d$=\pm 1$.

Esse caso fornece as soluções do tipo $\pm$ I.

Portanto, as soluções serão as matrizes:

$$\boxed{\pm I,\ \pm\begin{pmatrix}a & b\\ \frac{1-a^2}{b} & -a\end{pmatrix}, b\neq 0 \text{ e } \pm\begin{pmatrix}1 & 0\\ c & -1\end{pmatrix}, c\in\Re^*.}$$

6. Se A e B são matrizes reais de ordem 2 que comutam com a matriz

$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, isto é, AX = XA e BX = XB. Mostre que AB = BA.

Solução.

Sejam $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, a,b,c,d $\in \Re$ e $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$, e,f,g,h $\in \Re$, matrizes que comutam com a matriz dada no enunciado, podemos escrever:

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ ou, fazendo as multiplicações em cada membro da igualdade e igualando os resultados obtemos:

$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix}$.

Desse modo:

$AB = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae & 0 \\ 0 & dh \end{pmatrix}$ = BA.

7. Diga se são verdadeiras ou falsas as afirmações abaixo. Caso verdadeira prove, caso contrário dê um contra-exemplo.

(a) Se AB = 0, então A = 0 ou B = 0.
(b) Se AB = 0, então B.A=0.
(c) Se pudermos efetuar o produto A.A, então A é uma matriz quadrada.

Solução.

(a) Falso. Por exemplo, sejam $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A.B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(b) Falso. Usando as mesmas matrizes A e B do item acima, temos, $A.B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, mas $BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(c) Verdadeiro, pois se A é uma matriz m x n e se podemos efetuar A x A $\Rightarrow$ m = n.

8

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 0 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix},$$

$$tr(A) = 1 + (-2) + 6 = 5$$

.

9.

$$A(G) = \begin{array}{c} \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Observando as linhas de $A(G)$, vemos que P_3 tem três elementos iguais a 1 na sua linha, de modo que P_3 influencia três pessoas — mais do que qualquer outro membro do grupo. Portanto, P_3 deve ser o líder do grupo. Por outro lado, P_5 não influencia ninguém.