# GAN 00007
# Álgebra Linear

Turma A1

Profa. Ana Maria Luz Fassarella do Amaral

# Informações:

- Página da disciplina:

http://www.professores.uff.br/anamluz/ensino/

+ConexãoUFF

- E-mail professora:

analuz@id.uff.br

(no título do e-mail colocar nome da disciplina)

- Atendimento (com professora – agendar por e-mail):

Local: Gab 23 – Bloco G - Gragoatá

Dia disponível: Segunda-feira 14:00 as 15:00

# Bibliografia Básica:

- Álgebra Linear com Aplicações, H. Anton e C. Rorres, Bookman, 2001.
- Material de Apoio: Notas de Álgebra linear, Jones Colombo e José Koiller, em preparação**.**

**Outras referências utilizadas**:

- STEINBRUCH, Alfredo, WINTERLE. Álgebra Linear
- Introdução à Álgebra Linear com Aplicações, Kolman, B. e Hill, D. R., LTC, RJ,2006.

# Sobre a disciplina:

- Álgebra Linear: Estudo de matrizes e tópicos relacionados
- Algumas Aplicações: telecomunicações, estatística, teoria do Jogos, computação gráfica, modelos econômicos,...

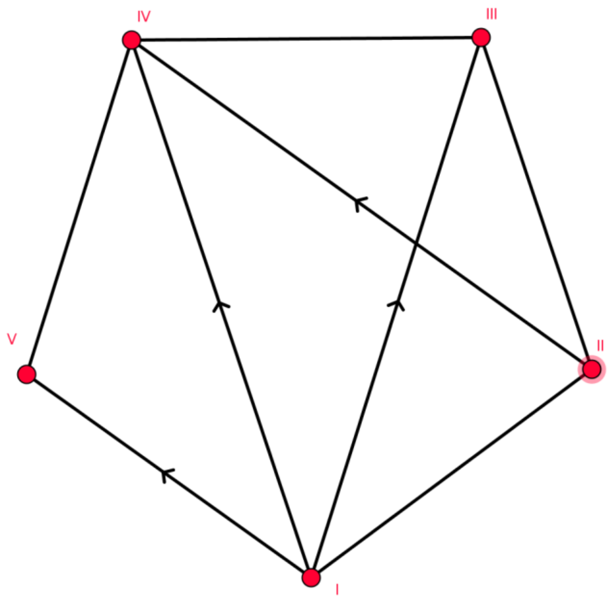
# Álgebra Linear: motivação:

- **<u>Aplicação em telecomunicações:</u>**
- Uma rede de comunicação tem cinco locais com transmissores de potências distintas. Estabelecemos que
- $a_{ij}$= 1, na matriz abaixo significa que a estação i pode transmitir diretamente à estação j, $a_{ij}$ = 0 significa que a transmissão da estação i não alcança a estação j. Uma estação não transmite diretamente para si mesma o que aparece representado pelo fato de que a diagonal principal da matriz é nula.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

# Álgebra Linear: motivação:

- A figura ao lado representa as relações de transmissão entre as estações. Os pontos representam as estações e estão rotuladas com números romanos, as ligações com seta indicam a transmissão (direta) orientada no sentido estação de saída – estação de chegada e as ligações sem seta indicam que a transmissão (direta) ocorre nos dois sentidos. Como exemplo, a estação III pode transmitir diretamente à estação IV e vice-versa. Já a estação II pode transmitir diretamente à estação IV, porém a estação IV não pode transmitir diretamente à estação II.




$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

# Álgebra Linear: motivação:

- Teoria dos Jogos


John Nash (1928) – Pêrmio Nobel em economia em 1994

Exemplo de jogo matricial (sempre se supõe que ambos os jogadores são igualmente capazes, que cada um está jogando o melhor possível e que cada jogador escolhe sua jogada sem saber o que seu oponente vai fazer), e de soma-zero (quantidade ganha por um jogador é exatamente a quantidade perdida pelo outro jogador)

**EXEMPLO 1** ■ Considere o jogo de cara ou coroa, consistindo em dois jogadores, $R$ e $C$, cada um dos quais tem uma moeda em sua mão. Cada jogador mostra um lado de sua moeda sem saber a escolha de seu oponente. Se ambos os jogadores estão mostrando o mesmo lado da moeda, $R$ ganha R$ 1,00 de $C$; caso contrário, $C$ ganha R$ 1,00 de $R$.

Nesse jogo de duas pessoas e soma zero, cada jogador tem duas jogadas possíveis: pode mostrar cara ou coroa. A matriz de pagamentos, então é*

$$\begin{array}{ccc} & & C \\ & & \begin{array}{cc} H & T \end{array} \\ R & \begin{array}{c} H \\ T \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

■

# Correlação amostral

## Correlação amostral

### Coeficiente de correlação de Pearson

A correlação amostral trata da medida da direção e do grau com que as variáveis $X$ e $Y$ se associam linearmente em uma amostra.

Para uma série de $n$ medições de $X$ e $Y$, $x_i$ e $y_i$ para $i = 1, 2, \ldots, n$, o coeficiente de correlação da amostra pode ser usado para estimar o coeficiente de correlação de Pearson da população $r$ entre $X$ e $Y$. Então, o coeficiente de correlação da amostra é escrito como:

$$r_{xy} = \frac{Cov(X,Y)}{S_x S_y} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}},$$

em que $\bar{x}$ e $\bar{y}$ são as médias amostrais de $X$ e $Y$.

O coeficiente de correlação de Pearson $r_{xy}$ é definido apenas se os desvios padrão $S_x$ e $S_y$ forem finitos e diferentes de zero. Isto também pode ser escrito como:

$$r_{xy} = \frac{\sum x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{n s_x s_y} = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{\sqrt{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}\ \sqrt{n\sum y_i^2 - (\sum y_i)^2}}.$$

Se $x$ e $y$ são resultados de medições que contêm erros de medições, os limites realistas no coeficiente de correlação não são -1 para +1, mas um intervalo menor.

**Interpretação geométrica**

As duas séries de valores $X = (x_1, \ldots, x_n)$ e $Y = (y_1, \ldots, y_n)$ podem ser consideradas vetores em um espaço de dimensão $n$. Com a substituição por vetores centrados nas médias, têm-se $X = (x_1 - \bar{x}, \ldots, x_n - \bar{x})$ e $Y = (y_1 - \bar{y}, \ldots, y_n - \bar{y})$.

O cosseno do ângulo $\alpha$ entre os vetores $X$ e $Y$, usando a norma euclidiana e o produto escalar normalizado, é dado pela fórmula

$$\cos(\alpha) = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{N}(y_i - \bar{y})^2}},$$

Portanto, $\cos(\alpha) = r_{xy}$, em que $r_{xy}$ está sempre -1 e 1.

O coeficiente de correlação é o cosseno do ângulo $\alpha$ entre os dois vetores centrados:

- Se $\alpha = 0^\circ$, então $r = 1$ e os dois vetores são colineares (paralelos);
- Se $\alpha = 90^\circ$, então $r = 0$ e os dois vetores são ortogonais;
- Se $\alpha = 180^\circ$, então $r = -1$ e os dois vetores são colineares, mas em direções opostas.

Mais genericamente, $\alpha = \arccos(r)$, em que $\arccos$ é a função inversa do cosseno. $\alpha$ representa, do ponto de vista geométrico, a intensidade da correlação entre os dois vetores aleatórios $X$ e $Y$, o que não pode ser medido em um teste de significância.

# Computação Gráfica

- Exemplo:

Uma *imagem digital* é uma matrix $M \times N$ onde cada elemento da matriz é um elemento de um espaço vetorial $V$. O caso mais comum é quando $V$ é um espaço de cor. Chama-se de *resolução* da imagem à ordem $M \times N$ da matriz. De modo análogo, define-se *imagem volumétrica* tomando matrizes de ordem $M \times N \times P$, onde cada entrada também é um elemento do espaço de cor. É comum utilizarem-se os termos *imagens bidimensionais* e *imagens tridimensionais* para cada um dos dois casos, respectivamente.

O formato matricial de dados permite a representação de imagens bidimensionais e volumétricas. Note-se que a estrutura da matriz determina implicitamente a conectividade de seus elementos. Cada elemento é chamado de *pixel*.

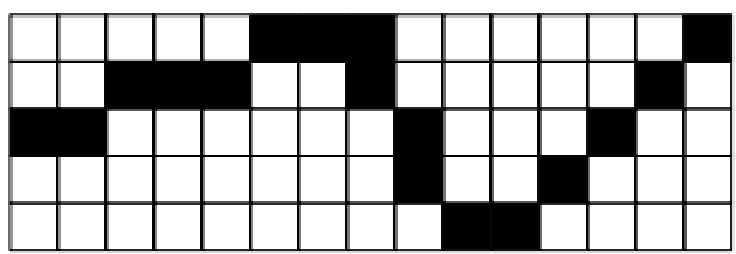


Figura 1.3: Formato Matricial.

# Exemplo de um problema que pode ser resolvido via Álgebra Linear

- *Uma costureira produz roupas customizadas: calças, vestidos e macacões. Cada calça leva 1 hora para ser costurada, 2 horas para ser ti ngida e 2 horas para ser customizada. Cada vestido leva 2 horas para ser costurado, 2 horas para ser tingido e 4 horas para ser customizado. Cada macacão leva 3 horas para ser costurado, 2 horas para ser tingido e 3 horas para ser customizado. A costureira utiliza a máquina de costura durante 17 horas por semana, a bancada para tingir 20 horas por semana, e a bancada para customizar as roupas 28 horas por semana. Quantos roupas (por semana) de cada tipo a costureira consegue produzir?*

# Referências:


- Notas de aula : Introdução a Computação Gráfica – IMPA

(http://underpop.free.fr/g/graficos/computacao-grafica/introducao-a-computacao-grafica.pdf)

- https://pt.wikipedia.org/wiki/Correla%C3%A7%C3%A3o
- Introdução à Álgebra Linear com Aplicações, Kolman, B. e Hill, D. R., LTC, RJ,2006.