GAN 00007
Introdução à Álgebra Linear
Aula 5

Turma A1

Profa. Ana Maria Luz Fassarella do Amaral

Codificação por multiplicação matricial

Exemplo retirado de W. K. Nicholson, Álgebra Linear.

Um avião espião voa sobre território inimigo e transmite sua posição

$X = [x \;\; y]^t$ para o quartel-general (aqui x e y denotam a longitude e a latitude, respectivamente). Essas transmissões provavelmente serão interceptadas, por isso elas devem ser codificadas para que a posição exata seja mantida em sigilo. O método escolhido é a multiplicação das coordenadas pela matriz A dada abaixo, obtendo assim coordenadas codificadas $X' = [a \;\; b]^t$ como a seguir.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \qquad X' = \binom{a}{b} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x-4y \\ 2x+7y \end{pmatrix}$$

Deduza um método para que o quartel-general possa decodificar essas coordenadas. Podemos decodificar usando multiplicação de matrizes?

(Dica: O quartel-general recebe coordenadas $\binom{a}{b}$ e quer recuperar $\binom{x}{y}$)

$$\begin{cases} 3x - 4y = a \\ 2x + 7y = b \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & -4 & a \\ 2 & 7 & b \end{array}\right] \xrightarrow[L_1 := L_1 - L_2]{} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -11 & a-b \\ 2 & 7 & b \end{array}\right] \xrightarrow[L_2 := L_2 - 2L_1]{} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -11 & a-b \\ 0 & 29 & -2a+3b \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[L_2 := \frac{L_2}{29}]{} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -11 & a-b \\ 0 & 1 & \frac{-2a+3b}{29} \end{array}\right] \xrightarrow[L_1 := L_1 + 11L_2]{} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{7a+4b}{29} \\ 0 & 1 & \frac{-2a+3b}{29} \end{array}\right]$$

$$a - b + \frac{11}{29}(-2a+3b) = \frac{7}{29}a + \frac{4}{29}b$$

$$x = \frac{7a+4b}{29}$$

$$y = \frac{-2a+3b}{29}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 7/29 & 4/29 \\ -2/29 & 3/29 \end{bmatrix}}_{A^{-1}} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

Matriz Inversa

Se A e C são matrizes quadradas tais que

$$AC = CA = I$$

dizemos que C é a matriz inversa de A e A é a matriz inversa de C.

Exercícios:

1 – Considere as matrizes A e C abaixo. Mostre que a matriz C é inversa da matriz A.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

2 – Mostre que a matriz A abaixo não possui inversa.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot C = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = C \cdot A$$

$$C = A^{-1} \quad , \quad A = C^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$2a - 3c = 1$$
$$2b - 3d = 0$$
$$0b + 0d = 1 \leftarrow \text{sistema impossível}$$

$$\begin{bmatrix} x & y \\ \end{bmatrix}$$

Matriz Inversa

Seja $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

a) Você consegue encontrar condições para garantir que A possui inversa?

b) Consegue descobrir como deve ser a inversa de A, caso exista?

Matriz Inversa

Seja $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

a) Você consegue encontrar condições para garantir que A possui inversa?
b) Consegue descobrir como deve ser a inversa de A, caso exista?

O número ad – bc é chamado de determinante de A e a matriz $\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ é chamada de matriz adjunta de A.

Observamos neste exemplo que a inversa de A corresponde ao produto do inverso do determinante pela adjunta.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax+bz & ay+bw \\ cx+dz & cy+dw \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} ax+bz=1 \\ cx+dz=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ay+bw=0 \\ cy+dw=1 \end{cases}$$

$$x=\frac{1-bz}{a} \qquad x=\frac{-dz}{c} \implies \frac{1-bz}{a}=-\frac{dz}{c}$$

$$c-bzc=-dza$$

$$-bc.z+da.z=-c$$

$$z(da-bc)=-c$$

$$\boxed{z=\frac{-c}{da-bc}}$$

substituindo z:

$$\boxed{x=\frac{d}{da-bc}}$$

$$y=\frac{-bw}{a} \qquad y=\frac{1-dw}{c} \implies \frac{-bw}{a}=\frac{1-dw}{c}$$

$$-cb.w=a-da.w$$

$$-cb.w+da.w=a$$

$$w(da-cb)=a$$

$$\boxed{w=\frac{a}{da-bc}}$$

substituindo w:

$$\boxed{y=\frac{-b}{da-bc}}$$

inversa de A: $\begin{bmatrix} \frac{d}{da-bc} & \frac{-b}{da-bc} \\ \frac{-c}{da-bc} & \frac{a}{da-bc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{da-bc}$ [redacted]

(Solução da Carolina)

Método para Cálculo da Inversa

Exemplo Nicholson, pag. 39:

Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$

Encontre a inversa da matriz A. Para isso, considere que a matriz inversa de A é

$$C = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Calcule AC, iguale a I e resolva os sistemas lineares resultantes para descobrir os valores de a, b, c, d.

Método para Cálculo da Inversa

Solução: $$AC = \begin{bmatrix} a+2c & b+2d \\ 3a+7c & 3b+7d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Isso nos permite montar dois sistemas: $\begin{cases} a+2c=1 \\ 3a+7c=0 \end{cases}$ e $\begin{cases} b+2d=0 \\ 3b+7d=1 \end{cases}$

Para resolvê-los, usamos o escalonamento sobre as matrizes aumentadas:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 0 \end{array}\right] \text{ e } \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & 1 \end{array}\right]$$

Observe que fazemos duas vezes o mesmo escalonamento (buscando colocar a matriz A na forma escalonada reduzida). Em uma destas vezes montamos a matriz aumentada com o vetor $[1\ \ 0]^t$ (para encontrar o vetor $[a\ \ c]^t$) e na outra vez com o vetor $[0\ \ 1]^t$ (para encontrar o vetor $[b\ \ c]^t$).

Método para Cálculo da Inversa

Poderíamos ter feito os dois escalonamentos simultaneamente, se houvéssemos colocado os dois vetores ao lado da matriz A, criando e escalonando uma matriz “super-aumentada”:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Daí vem o método que usamos para inverter uma matriz A: escrever a matriz A e ao lado a identidade, escalonar tudo até levar A à forma escalonada reduzida. O que obtivermos do lado direito será a matriz inversa de A.

Como aplicar isso à solução de Sistemas?

Problema de Ração:

Considerando os dados da tabela, é possível produzir uma ração que tenha 200g de carboidratos, 40g de fibras e 30g de proteínas?

	feijão	arroz	milho
Carboidrato	42g	74g	23g
Proteínas	18g	10g	2,5g
fibras	18g	12g	3g

$$A = \begin{pmatrix} 42 & 74 & 23 \\ 18 & 10 & 2{,}5 \\ 18 & 12 & 3 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 200 \\ 30 \\ 40 \end{pmatrix}$$

Teorema "do Curso": Se A é uma matriz nxn, então as seguintes afirmações são equivalentes:

a) **A** é invertível.

b) **Ax=0** só tem a solução trivial.

c) **A** pode ser reduzida a $\mathbf{I_n}$ por operações elementares com linhas (A forma escalonada reduzida por linhas de **A** é $\mathbf{I_n}$.)

d) **A** pode ser expressa como um produto de matrizes elementares.

e) **Ax=b** é consistente para cada vetor coluna **b** de tamanho nx1.

f) **Ax=b** tem exatamente uma solução para cada vetor coluna **b** nx1.

g) Existe uma matriz **C** tal que **AC = I**.

h) A matriz **A** tem posto completo, isto é, o posto de **A** é a ordem da matriz quadrada **A**.

Investigue...
Algumas propriedades...
(perguntas da folha)

1 - Sendo A e B matrizes inversíveis, se existir o produto AB, ele também será inversível? Qual seria sua inversa?

2 – Se A for inversível, sua transposta também será? Em caso afirmativo como seria tal inversa?

3 – Se uma matriz A for inversível e c for um número real (não nulo), cA será inversível? Como será a inversa?

Alguns exercícios...

1 – Encontre A sabendo que $(A^{-1} - 3I)^t = 2\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$

2 – Sendo A, B e C inversíveis, simplifique $C^t B(AB)^{-1} (C^{-1} A^t)^t$

Investigue...

Seja A uma matriz triangular (digamos superior).

1 – Se algum elemento da diagonal de A for zero, A pode ser inversível?

2 – E se nenhum elemento da diagonal for nulo, podemos garantir a inversibilidade?

3 – Se A for inversível, sua inversa poderia também ser triangular?

Referências:

- Material do curso de Álgebra Linear da Profa.: Anne Michelle Dysman (GAN)