GAN 00030

Tópicos de Matemática Aplicada – A1 – 2019.1

Profa. Ana Maria Luz Fassarella do Amaral

Aula 5

Limites que envolvem

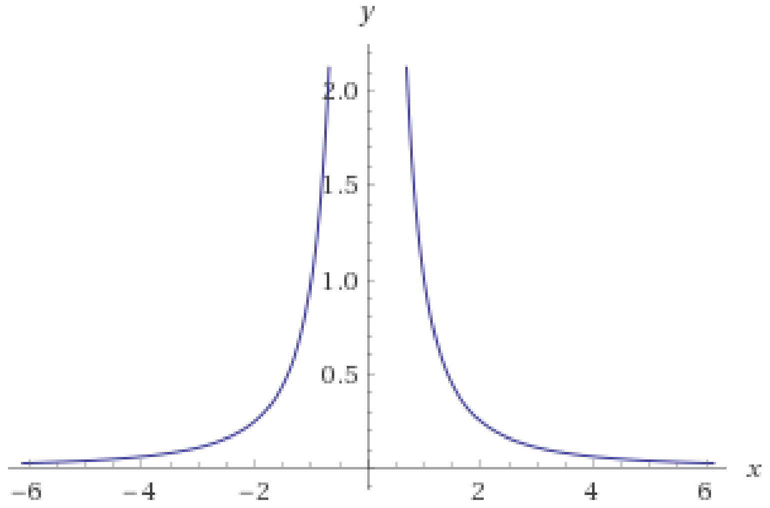
$$\infty$$

(infinito)

Exemplos:

Vamos analisar, por exemplo, o comportamento da função $f(x) = \frac{1}{x^2}$ quando x se aproxima de zero

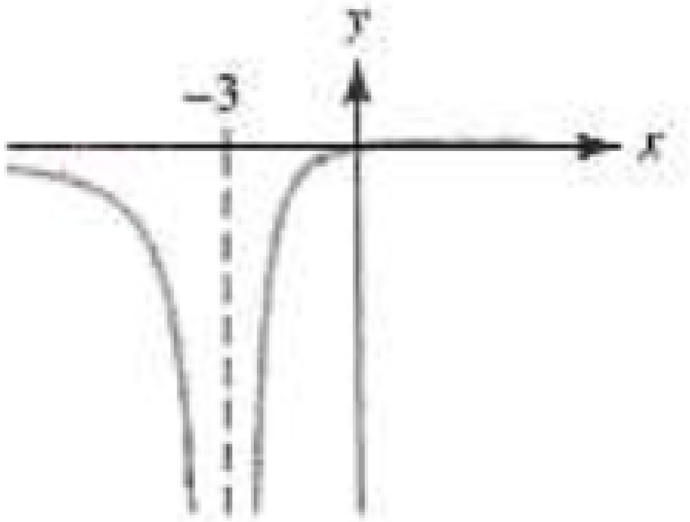
x	– 0,1	– 0,01	– 0,001	0	0,001	0,01	0,1
f(x)				–			



Exemplos:

Vamos analisar a função $g(x) = \dfrac{x}{(x+3)^2}$ para valores de x próximos de – 3

x	– 3,1	– 3,01	– 3,001	– 3	– 2,999	– 2,99	– 2,9
g(x)				–			



Exemplos:

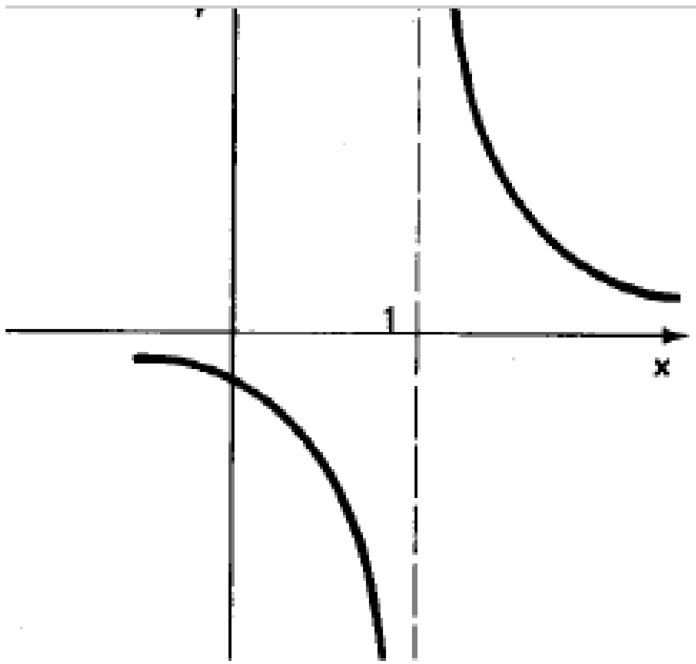
Consideremos agora a função h definida por $h(x) = \dfrac{1}{x - 1}$ para todo x real e $x \neq 1$.

Atribuindo a x valores próximos de 1, porém menores que 1, temos:

x	0	0,5	0,75	0,9	0,99	0,999
f(x)						

e atribuindo a x valores próximos de 1, porém maiores que 1, temos:

x	2	1,5	1,25	1,1	1,01	1,001
f(x)						



Observação: Os símbolos ∞ e $-\infty$ não representam um número real. São apenas notações para indicar que f(x) aumenta ou diminui ilimitadamente quando x se aproxima de um número real. Assim, quando escrevemos, por exemplo, que $\lim_{x \to c} f(x) = \infty$, não estamos dizendo que f(x) está cada vez mais próximo de um número real, ou que o limite existe.

De modo geral temos:

Teorema: Se $\lim\limits_{x\to c^+} f(x) = L$, onde L é um número real diferente de zero, e $\lim\limits_{x\to c^+} g(x) = 0$ então $\lim\limits_{x\to c^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty$, com o sinal dependendo dos sinais de L e de g(x) à direita de c.

Observação: O teorema anterior pode ser enunciado para o limite à esquerda de c com as mesmas conclusões.

Exercícios

1) $\lim\limits_{x \to 5^+} \dfrac{9 - x}{x - 5}$

2) $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{-3x}{x - 2}$

3) $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x^2 + 1}{x^2 + x}$

4) $\lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{1 - x}{x + 2}$

5) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{5}{x^3 - x^2}$

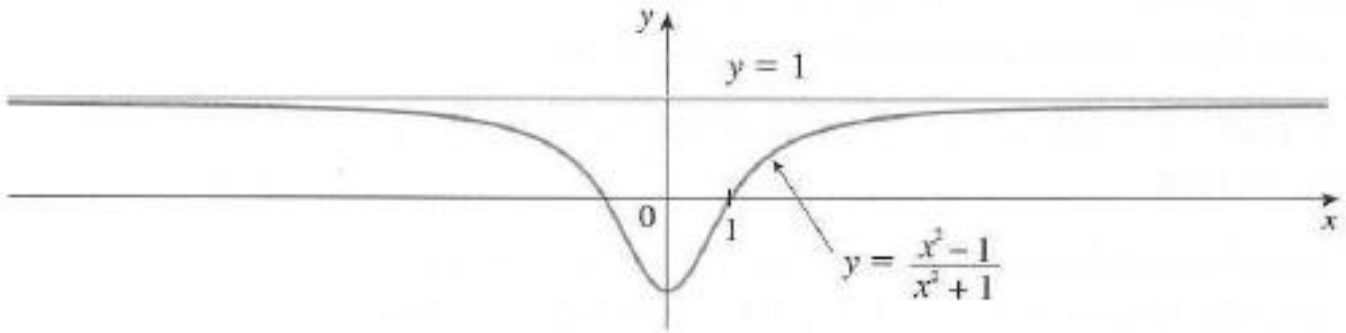
6) $\lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{x - 2}{x + 1}$

Limites no infinito – Assíntotas horizontais

Vamos começar pela análise do comportamento da função f definida por

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

x	$f(x)$
0	−1
±1	0
±2	0,600000
±3	0,800000
±4	0,882353
±5	0,923077
±10	0,980198
±50	0,999200
±100	0,999800
±1 000	0,999998



Em geral, usamos a notação $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ para indicar que os valores de f(x) tendem para o número L quando x aumenta ilimitadamente. Analogamente, escrevemos $\lim_{x \to -\infty} f(x) = M$ para indicar que os valores de f(x) tendem para o número M quando x diminui ilimitadamente.

Teorema: Se n é um número inteiro positivo e c é um número real então

$$\lim_{x \to \infty} \frac{c}{x^n} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{c}{x^n} = 0$$

Exemplos: 1) $\lim_{x \to \infty} \frac{12}{x^7} = 0$ 2) $\lim_{x \to -\infty} \frac{7}{x^4} = 0$

O limite no infinito de uma função polinomial é igual ao limite de seu termo de maior expoente (pois se colocarmos esse termo em evidência, todos os demais tendem a zero). Por exemplo:

$$\lim_{x \to \infty} (2x^5 - 4x^2 + 3x + 7) = \lim_{x \to \infty} 2x^5 \left(1 - \frac{2}{x^3} + \frac{3}{2x^4} + \frac{7}{2x^5}\right) = \lim_{x \to \infty} 2x^5 = \infty$$

Como consequência, quando tivermos o limite no infinito de um quociente de dois polinômios, ele será igual ao limite do quociente dos termos de maior expoente do numerador e do denominador. Assim, por exemplo:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{6x^7 + 5x^4 - 3x + 7}{2x^3 - 6x + 9} = \lim_{x \to -\infty} \frac{6x^7}{2x^3} = \lim_{x \to -\infty} 3x^4 = \infty$$

Propriedades dos Limites Infinitos

Dados		Conclusão
$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \to a} g(x) = +\infty$	$\lim_{x \to a} (f + g)(x) = +\infty$
$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$	$\lim_{x \to a} g(x) = -\infty$	$\lim_{x \to a} (f + g)(x) = -\infty$
$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \to a} g(x) = b \neq 0$	$\lim_{x \to a} (f \cdot g)(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } b > 0 \\ -\infty & \text{se } b < 0 \end{cases}$
$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$	$\lim_{x \to a} g(x) = b \neq 0$	$\lim_{x \to a} (f \cdot g)(x) = \begin{cases} -\infty & \text{se } b > 0 \\ +\infty & \text{se } b < 0 \end{cases}$
$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \to a} g(x) = +\infty$	$\lim_{x \to a} (f \cdot g)(x) = +\infty$
$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \to a} g(x) = -\infty$	$\lim_{x \to a} (f \cdot g)(x) = -\infty$
$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$	$\lim_{x \to a} g(x) = -\infty$	$\lim_{x \to a} (f \cdot g)(x) = +\infty$
$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$		$\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = 0$
$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$		$\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = 0$
$\lim_{x \to a} f(x) = 0$		$\lim_{x \to a} \left\lvert \frac{1}{f(x)} \right\rvert = +\infty$

Não poderemos estabelecer uma lei para os seguintes casos:

$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \to a} g(x) = +\infty$	$\lim_{x \to a} (f - g)(x) = ?$
$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$	$\lim_{x \to a} g(x) = -\infty$	$\lim_{x \to a} (f - g)(x) = ?$
$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \to a} g(x) = -\infty$	$\lim_{x \to a} (f + g)(x) = ?$
$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ (ou $-\infty$)	$\lim_{x \to a} g(x) = 0$	$\lim_{x \to a} (f \cdot g)(x) = ?$
$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ (ou $-\infty$)	$\lim_{x \to a} g(x) = -\infty$ (ou $+\infty$)	$\lim_{x \to a} \frac{f}{g}(x) = ?$

Resolução da Lista 2