UFF – Departamento de Análise
Profa. Ana Maria Luz F. Amaral
GAN00007 – Introdução à Álgebra Linear -A1– 2019.1

Lista de Exercícios 6– Espaços Vetoriais – Parte II

1- Encontre o vetor coordenada de v=(4,-3,2) em relação a base B={(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)} do IR^3

2- Seja V= M(2,2) (o espaço vetorial das matrizes 2x2). Completar o conjunto $S=\left\{\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\right\}$ de modo a formar uma base do M(2,2)

3- Diz-se que uma base B={v_1,...,v_n} de V (espaço vetorial euclidiano) é ***ortogonal*** se seus vetores são dois a dois ortogonais. Verifique se B'={(1,2,-3),(3,0,1),(1,-5,-3)} é uma base ortogonal do IR^3.

4. Diz-se que uma base B={v_1,...,v_n} de V (espaço vetorial euclidiano) é ***ortonormal*** se é ortogonal e se seus vetores são unitários, ou seja:

$$\langle v_i, v_j\rangle = \begin{cases} 0 \ para\ i \neq j \\ 1 \ para\ i = j \end{cases}.$$

Verifique se as bases abaixo são bases ortonormais do espaço vetorial V indicado:

a) B={(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)}, V=IR^3.

b) B=$\left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0\right),\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$, V=$IR^2$

5. Seja V um espaço vetorial euclidiano e W um subespaço vetorial de V. O subconjunto de V denotado por:

$$W^{\perp} = \{v \in V; v \perp W\} = \{v \in V; \langle v, w\rangle = 0 \,\forall w \in W\},$$

que é o subconjunto de V formado pelos vetores que são ortogonais a W , é chamado ***complemento ortogonal*** de W. Temos as seguintes propriedades: I) $W^{\perp}$ é subespaço de V, II) V=$W \oplus W^{\perp}$.

a) Considerando o produto interno usual no IR^3, determine o complemento ortogonal do subespaço W=$\{(x,y,z)\in IR^3; x+2y-z=0\}$ (*Comentário*: Um a vez que você tenha encontrado $W^{\perp}$, observe que: I) $W^{\perp}$ é subespaço de IR^3, II) IR^3=$W \oplus W^{\perp}$). b) Encontre uma base ortonormal para W (utilize processo de Gram-Schmidt)

6. Leia a explicação abaixo sobre **Independência Linear de Funções** extraida de:
Álgebra Linear com Aplicações, H. Anton e C. Rorres, Bookman, 2001.

Independência Linear de Funções Às vezes podemos deduzir a dependência linear de funções a partir de identidades conhecidas. Por exemplo, as funções

$$\mathbf{f}_1 = \text{sen}^2 x, \quad \mathbf{f}_2 = \cos^2 x \quad \text{e} \quad \mathbf{f}_3 = 5$$

formam um conjunto linearmente dependente em $F(-\infty, \infty)$, pois a equação

$$5\mathbf{f}_1 + 5\mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_3 = 5\,\text{sen}^2 x + 5\cos^2 x - 5 = 5(\text{sen}^2 x + \cos^2 x) - 5 = 0$$

expressa **0** como uma combinação linear de $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$ e $\mathbf{f}_3$ com coeficientes não todos zero. No entanto, estas identidades só podem ser aplicadas em situações especiais. Embora não exista um método geral que possa ser utilizado para estabelecer a dependência ou independência linear de funções em $F(-\infty, \infty)$, nós iremos desenvolver um teorema que, às vezes, pode ser usado para mostrar que um dado conjunto de funções é linearmente independente.

Se $\mathbf{f}_1 = f_1(x), \mathbf{f}_2 = f_2(x), \ldots, \mathbf{f}_n = f_n(x)$ são funções $n-1$ vezes diferenciáveis no intervalo $(-\infty, \infty)$, então chamamos o determinante da matriz

$$W(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{bmatrix}$$

o ***wronskiano*** de $f_1, f_2, \ldots, f_n$. Como veremos a seguir, este determinante é útil para decidir se as funções $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$ formam um conjunto linearmente independente de vetores no espaço vetorial $C^{(n-1)}(-\infty, \infty)$.

Suponha, por enquanto, que $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$ são vetores linearmente dependentes em $C^{(n-1)}(-\infty, \infty)$. Então existem escalares $k_1, k_2, \ldots, k_r$, *não todos zero*, tais que

$$k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) + \cdots + k_n f_n(x) = 0$$

para todos x no intervalo $(-\infty, \infty)$. Combinando esta equação com as equações obtidas por $n-1$ sucessivas derivações resulta

$$\begin{aligned} k_1 f_1(x) &+ k_2 f_2(x) &+ \cdots + k_n f_n(x) &= 0 \\ k_1 f_1'(x) &+ k_2 f_2'(x) &+ \cdots + k_n f_n'(x) &= 0 \\ \vdots & \qquad \vdots & \vdots \qquad & \quad \vdots \\ k_1 f_1^{(n-1)}(x) &+ k_2 f_2^{(n-1)}(x) &+ \cdots + k_n f_n^{(n-1)}(x) &= 0 \end{aligned}$$

Assim, a dependência linear de $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$ implica que o sistema linear

$$\begin{bmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

tem uma solução não-trivial para *cada* x no intervalo $(-\infty, \infty)$. Isto, por sua vez, implica que para cada x em $(-\infty, \infty)$, a matriz de coeficientes é não-invertível ou, equivalentemente, que seu determinante (o wronskiano) é zero para cada x em $(-\infty, \infty)$. Assim, se o wronskiano *não* é identicamente zero em $(-\infty, \infty)$, então as funções $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$ devem ser vetores linearmente independentes em $C^{(n-1)}(-\infty, \infty)$. Isto é o que afirma o seguinte teorema.

Teorema 5.3.4

Se as funções $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$ têm $n-1$ derivadas contínuas no intervalo $(-\infty, \infty)$ e se o wronskiano destas funções não é identicamente zero em $(-\infty, \infty)$, então estas funções formam um conjunto linearmente independente de vetores em $C^{(n-1)}(-\infty, \infty)$.

EXEMPLO 9 Um Conjunto Linearmente Independente em $C^1(-\infty, \infty)$

Mostre que as funções $\mathbf{f}_1 = x$ e $\mathbf{f}_2 = \operatorname{sen} x$ formam um conjunto linearmente independente de vetores em $C^1(-\infty, \infty)$.

Solução.

No Exemplo 8 nós mostramos que estes vetores formam um conjunto linearmente independente observando que nenhum dos dois vetores é múltiplo do outro. Para fins ilustrativos, vamos obter este resultado usando o Teorema 5.3.4. O wronskiano é

$$W(x) = \begin{vmatrix} x & \operatorname{sen} x \\ 1 & \cos x \end{vmatrix} = x \cos x - \operatorname{sen} x$$

Esta função não é identicamente zero no intervalo $(-\infty, \infty)$ (verifique), de modo que $\mathbf{f}_1$ e $\mathbf{f}_2$ formam um conjunto linearmente independente de vetores. ♦

Baseado na explicação acima resolva o seguinte exercício da seção 5.3 do livro:

20. (***Para leitores que estudaram Cálculo.***) Use o wronskiano para mostrar que os seguintes conjuntos de vetores são linearmente independentes.

(a) $1, x, e^x$ (b) $\operatorname{sen} x, \cos x, x \operatorname{sen} x$ (c) e^x, xe^x, x^2e^x (d) $1, x, x^2$

"***O espaços vetoriais tem a ver com a obtenção das cores utilizando cores primárias.***"

As cores primárias são: azul, amarelo e vermelho. Misturando essas cores em diferentes proporções, podemos obter outras cores. Por exemplo, se misturarmos o azul com o amarelo obtemos o verde; e se misturamos o amarelo com o vermelho obtemos o laranja. Nesse sentido, podemos dizer que as cores, em geral, podem ser classificadas como elementos de um espaço vetorial, sendo os vetores.

No espaço vetorial das cores, a base é constituída pelas cores azul (***z***), amarelo (***a***) e vermelho (***v***), pois qualquer outra cor pode ser construída por meio de uma combinação linear desses três vetores. Seja ***c***, um vetor (uma cor) qualquer deste espaço, tal vetor pode ser representado por $c = b_1.z + b_2.a + b_3.v$ Os coeficientes b_1, b_2 e b_3 representam a proporção de cada cor primária que constituirá a mistura.

A representação por cores primárias é só uma forma de se fazer a representação de vetores neste espaço. Outra forma, muito usual em computação gráfica, é o sistema de cores-luz, no qual a base é constituída pelas cores verde, vermelha e azul. Com isso, você pode perceber que para algo tão abstrato como um espaço vetorial podemos encontrar aplicações, mesmo as mais básicas como no sistema de cores. A matemática é realmente aplicável em tudo.

Extraído de:
http://www.ead.cesumar.br/moodle2009/lib/ead/arquivosApostilas/8113.pdf. Acesso em set/2018.