Tópicos de Matemática Aplicada - A1 - 2019.1

Material de apoio para: Aplicações de derivada - construção de gráficos

Recapitulando alguns conceitos vistos em sala:

Definição: Seja f uma função derivável em um intervalo aberto I.

a) O gráfico de f **é côncavo** (ou tem **concavidade) para cima** em I, se f' é crescente em I.

b) O gráfico de f **é côncavo** (ou tem **concavidade**) **para baixo** em I, se f' é decrescente em I.

Para saber se o gráfico de uma função f é côncavo para cima ou para baixo em um intervalo aberto I, precisamos então descobrir se f' é crescente ou decrescente em I. Aplicando em f' o teste da derivada primeira para funções crescentes e decrescentes concluímos que:

$f'' > 0$ em I $\rightarrow$ f' é crescente em I $\rightarrow$ o gráfico de f é côncavo para cima em I

$f'' < 0$ em I $\rightarrow$ f' é decrescente em I $\rightarrow$ o gráfico de f é côncavo para baixo em I

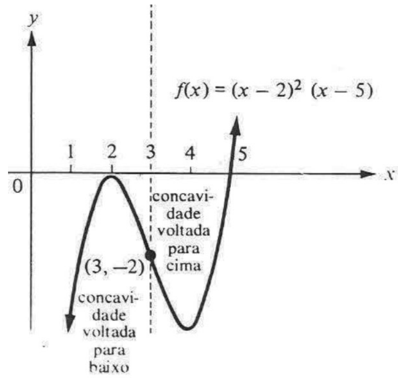
Temos o seguinte teorema:

Teste da derivada segunda para concavidade de um gráfico: Seja f uma função duas vezes derivável em um intervalo aberto I.

a) Se $f''(x) > 0$ para todo x em I então o gráfico de f é côncavo para cima em I.

b) Se $f''(x) < 0$ para todo x em I então o gráfico de f é côncavo para baixo em I.

Cada ponto do gráfico de uma função onde a concavidade muda é chamado de **ponto de inflexão**. Por exemplo, o ponto (3,–2) na figura ao lado é um ponto de inflexão do gráfico de $f(x) = (x - 2)^2(x - 5)$.



Definição: Uma função f possui um **ponto de inflexão** em x = a se f é contínua em a e se a concavidade do gráfico de f muda em x = a.

Um procedimento análogo ao usado para determinar os intervalos de crescimento e decrescimento de uma função pode ser usado para encontrar os intervalos de concavidade de uma função.

Exemplos:

1) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$

Temos que $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$ e $f''(x) = 6x - 12$

$f''(x) = 0 \leftrightarrow 6x - 12 = 0 \leftrightarrow x = 2$. Esse valor determina os intervalos $]-\infty, 2[$ e $]2, \infty[$. Calculando o valor de $f''(x)$ para números de teste em cada um desses intervalos concluímos que o gráfico de f tem concavidade para baixo em $]-\infty, 2[$ e concavidade para cima em $]2, \infty[$.

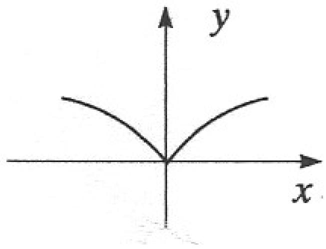
Como a concavidade do gráfico muda em x = 2 e f é contínua em 2 então f possui um ponto de inflexão em x = 2.

2) $f(x) = \dfrac{2x}{x-1}$

Calculamos $f''(x) = \dfrac{4}{(x-1)^3}$, que é uma função contínua em todos os números reais exceto em x = 1. Esse valor determina os intervalos $]-\infty, 1[$ e $]1, \infty[$. Determinando o valor de f'' para números de teste em cada um desses intervalos concluímos que o gráfico de f tem concavidade para baixo $]-\infty, 1[$ e concavidade para cima em $]1, \infty[$.

Como o gráfico de f só muda de concavidade em x = 1 e f não é contínua em x = 1, não existem pontos de inflexão.

3) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

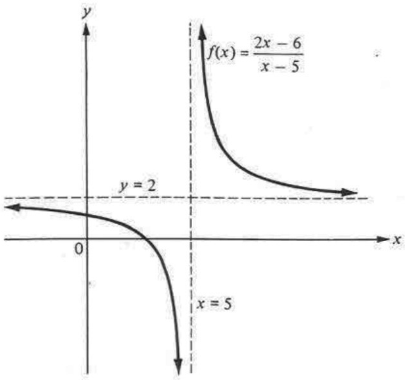


Calculamos $f''(x) = \dfrac{-2}{9\sqrt[3]{x^4}}$, que é negativa e contínua em todos os números reais diferentes de zero. Então concluímos que o gráfico de f tem concavidade para baixo em $]-\infty, 0[$ e em $]0, \infty[$.

Como a concavidade do gráfico de f não muda, não existem pontos de inflexão.

Assíntotas horizontais e assíntotas verticais

Os limites que envolvem infinito podem ser usados para descrever retas conhecidas como **assíntotas**, que estão frequentemente associadas a gráficos de funções racionais.



Vamos considerar, por exemplo, o gráfico da função f esboçado ao lado.

O gráfico se aproxima da reta horizontal y = 2 quando x aumenta ou diminui ilimitadamente. Essa reta é chamada de **assíntota horizontal**. As assíntotas horizontais do gráfico de uma função f podem ser determinadas calculando:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) \text{ e } \lim_{x \to \infty} f(x)$$

Se algum desses limites existe (é um número real), então o valor do limite determina a assíntota horizontal.

O gráfico de uma função também pode se aproximar de uma reta vertical quando x se aproxima de um determinado número, como no gráfico acima. A reta x = 5 é chamada de **assíntota vertical** do gráfico de f.

Definição: Seja f uma função real.

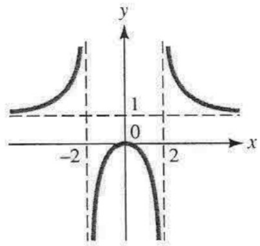
Se f tende para infinito (ou menos infinito) quando x tende para um número a pela direita ou pela esquerda, a reta x = a é uma **assíntota vertical** do gráfico de f.

Se $\lim_{x \to \infty} f(x) = b_1$ e $\lim_{x \to -\infty} f(x) = b_2$ onde b_1 e b_2 são números reais, as retas $y = b_1$ e $y = b_2$ são **assíntotas horizontais** do gráfico de f.

Observações: 1 – Para localizar as possíveis assíntotas verticais do gráfico de uma função racional f tal que $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ devemos procurar valores de x tais que $q(x) = 0$ e $p(x) \neq 0$. Para achar as assíntotas horizontais devemos calcular os limites de f quando x tende para ∞ e quando x tende para $-\infty$. Se algum desses limites existe (é finito), então o valor do limite determina a equação da assíntota horizontal.

2 – As funções polinomiais não possuem assíntotas horizontais nem assíntotas verticais.

Exemplos: 1) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$

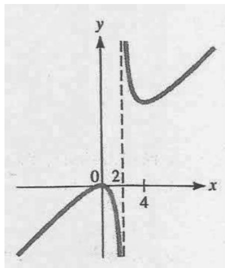


Solução: $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x^2}{x^2 - 4} = \infty$ e $\lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{x^2}{x^2 - 4} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{x^2 - 4} = 1$ e $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2}{x^2 - 4} = 1$

Então x = 2 e x = – 2 são assíntotas verticais e y = 1 é assíntota horizontal

2) $f(x) = \dfrac{x^2}{x - 2}$

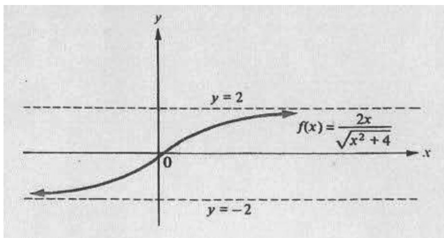


Solução: $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x^2}{x - 2} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{x - 2} = -\infty$ e $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2}{x - 2} = \infty$

Então x = 2 é assíntota vertical e não existem assíntotas horizontais

3) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$



Solução: $\sqrt{x^2 + 1} \neq 0$ para todo número real

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = -1$ e $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = 1$

Não existem assíntotas verticais e y = 1 e y = – 1 são assíntotas horizontais

4.5 – Construção de gráficos

Para construir o gráfico de uma função f devemos determinar seu domínio, os intervalos nos quais f é crescente ou decrescente, a concavidade e verificar a existência de extremos relativos, pontos de inflexão e de assíntotas. Como o estudo dessas características foi realizado em várias etapas anteriores, vamos estabelecer um roteiro para o traçado do gráfico de uma função.

1 – Determine o domínio de f.

2 – Calcule f' e determine os pontos críticos (isto é, os valores de x onde $f'(x) = 0$ ou $f'(x)$ não existe). Utilize o teste da derivada primeira para achar os intervalos em que f é crescente ou decrescente.

3 – Calcule f'' e use o teste da derivada segunda para determinar os intervalos onde o gráfico de f é côncavo para cima e onde é côncavo para baixo.

4 – Encontre, se existirem, os pontos de máximos e mínimos relativos e os pontos de inflexão.

5 – Calcule os limites envolvendo infinito para determinar, se existirem, as assíntotas horizontais e verticais.

6 – Represente, se necessário, alguns pontos adicionais para ajudar a identificar a forma do gráfico.

Exemplo 1: $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$

1) O domínio de f é IR

2) Temos que $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

Daí $f'(x) = 0 \leftrightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0 \leftrightarrow x = 1$ ou $x = 3$

Esses valores determinam três intervalos $]-\infty, 1[$, $]1, 3[$ e $]3, \infty[$

Escolhendo, por exemplo, $x = 0$ no intervalo $]-\infty, 1[$ obtemos $f'(0) = 9$; tomando $x = 2$ em $]1, 3[$, obtemos $f'(2) = -3$; tomando $x = 4$ em $]3, \infty[$ achamos $f'(4) = 9$.

Então $f'(x) > 0$ em $]-\infty, 1[$
$f'(x) < 0$ em $]1, 3[$
$f'(x) > 0$ em $]3, \infty[$

Daí f é decrescente em $]1, 3[$ e crescente em $]-\infty, 1[$ e em $]3, \infty[$.

3) Temos que $f''(x) = 6x - 12$

Daí $f''(x) = 0 \leftrightarrow x = 2$. Esse valor determina os intervalos $]-\infty, 2[$ e $]2, \infty[$. Calculando o valor de $f''(x)$ para números de teste em cada um desses intervalos concluímos que o gráfico de f tem concavidade para baixo em $]-\infty, 2[$ e concavidade para cima em $]2, \infty[$.

4) Vimos em (2) que o sinal de f' muda de positivo para negativo em $x = 1$ e muda de negativo para positivo em $x = 3$ então f possui um máximo relativo em $x = 1$ e um mínimo relativo em $x = 3$.

Como a concavidade do gráfico muda em $x = 2$ e f é contínua em 2 então possui um ponto de inflexão em $x = 2$.

Temos que f(1) = 5, f(3) = 1 e f(2) = 3

Marcamos os pontos (1, 5) (máximo relativo), (3, 1) (mínimo relativo) e (2, 3) (de inflexão).

5) O gráfico de f não possui assíntotas.

O gráfico de $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ está esboçado na figura 1 abaixo.

Exemplo 2: $f(x) = \dfrac{4}{x-2}$

1) O domínio de f é IR – {2}

2) Calculando a derivada de f, obtemos $f'(x) = \dfrac{-4}{(x-2)^2}$, que é contínua e negativa em todos os números reais diferentes de 2. Então f é decrescente em] – ∞, 2[e em]2, ∞[.

3) Temos que $f''(x) = \dfrac{8}{(x-2)^3}$, que é uma função contínua em todos os números reais, exceto em x = 2. Esse valor determina os intervalos] – ∞, 2[e]2, ∞[. Calculando o valor de $f''(x)$ para números de teste em cada um desses intervalos concluímos que o gráfico de f tem concavidade para baixo] – ∞, 2[e concavidade para cima em]2, ∞[.

4) Sabemos que $f'(x) \neq 0$ para todos os números reais diferentes de 1 e que $f'(2)$ não existe mas, como 2 não pertence ao domínio de f, não existem pontos críticos. Logo, não existem extremos relativos.

Como o gráfico de f só muda de concavidade em x = 2 e f não é contínua em x = 2, não existem pontos de inflexão.

5) Temos que $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4}{x-2} = 0$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4}{x-2} = 0$. Então y = 0 é a equação da assíntota horizontal.

Como $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{4}{x-2} = \infty$, x = 2 é a equação da assíntota vertical do gráfico de f.

6) Para ajudar a identificar a forma do gráfico vamos marcar os pontos (–2, – 1), (0, – 2), (1, – 4), (3, 4), (4, 2) e (6, 1).

O gráfico $f(x) = \dfrac{4}{x-2}$ está esboçado na figura 2.

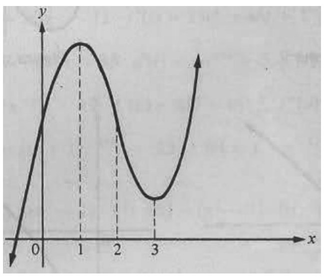


Figura 1

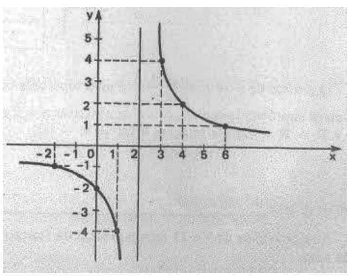


Figura 2

Exercícios – lista 9- Parte II

Nas questões de 1 a 6, faça um esboço do gráfico de f, determinando:
a) os intervalos onde f é crescente e onde é decrescente.
b) os intervalos onde o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo e onde tem concavidade voltada para cima.
c) os pontos de máximos e mínimos relativos e os pontos de inflexão do gráfico de f.

1) $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x$

2) $f(x) = x^3 - 3x + 2$

3) $f(x) = 1 + 3x^2 - x^3$

4) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$

5) $f(x) = x^3 - 3x^2$

6) $f(x) = x^3$

Nas questões 7 a 12, determine, se existirem: a) os intervalos onde f é crescente e onde é decrescente; b) os intervalos onde o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo e onde tem concavidade voltada para cima; c) os pontos de máximos e mínimos relativos e os pontos de inflexão do gráfico de f; d) as equações das assíntotas verticais e das assíntotas horizontais. Faça um esboço do gráfico de f.

7) Sabe-se que $f(x) = \dfrac{-4}{x-2}$ $\qquad f'(x) = \dfrac{4}{(x-2)^2}$ $\qquad f''(x) = \dfrac{-8}{(x-2)^3}$

8) Sabe-se que $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$ $\qquad f'(x) = \dfrac{-3}{(x-2)^2}$ $\qquad f''(x) = \dfrac{6}{(x-2)^3}$

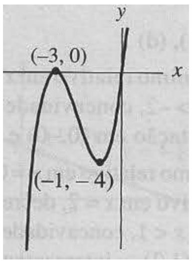
9) Sabe-se que $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ $\qquad f'(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$ $\qquad f''(x) = \dfrac{2}{(1-x)^3}$

10) Sabe-se que $f(x) = \dfrac{2x}{x-1}$ $\qquad f'(x) = \dfrac{-2}{(x-1)^2}$ $\qquad f''(x) = \dfrac{4}{(x-1)^3}$

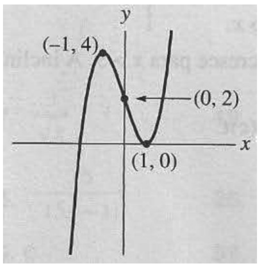
11) Sabe-se que $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$ $\qquad f'(x) = \dfrac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}$ $\qquad f''(x) = \dfrac{4x^3-12x}{(x^2+1)^3}$

12) Sabe-se que $f(x) = \dfrac{x}{(x+1)^2}$ $\qquad f'(x) = \dfrac{-x+1}{(x+1)^3}$ $\qquad f''(x) = \dfrac{2x-4}{(x+1)^4}$

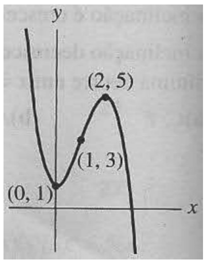
Respostas:



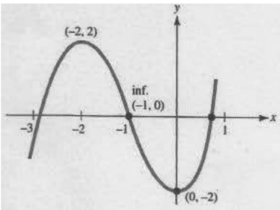
$f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x$



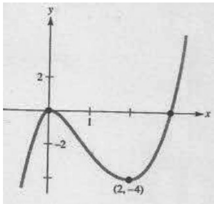
$f(x) = x^3 - 3x + 2$



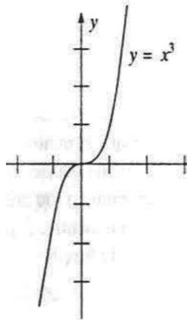
$f(x) = 1 + 3x^2 - x^3$

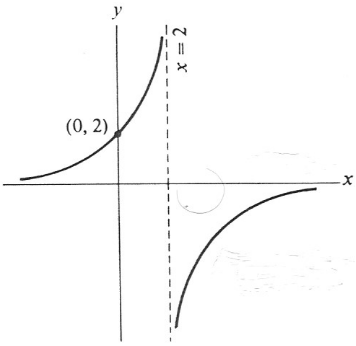


$f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$

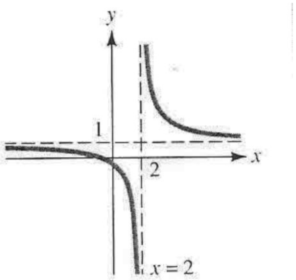


$f(x) = x^3 - 3x^2$

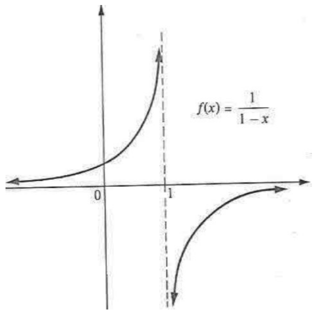


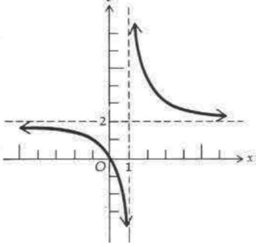


$f(x) = \dfrac{-4}{x-2}$

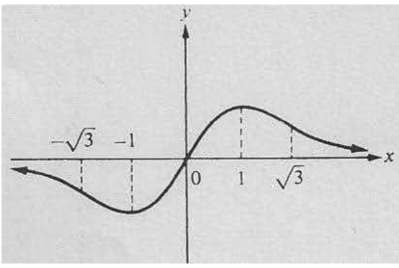


$f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$

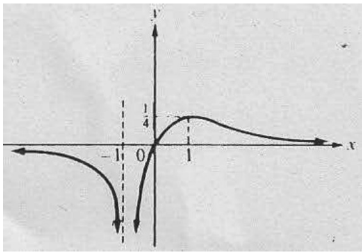




$f(x) = \dfrac{2x}{x-1}$



$f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$



$f(x) = \dfrac{x}{(x+1)^2}$