Aula 13/14 : vetores ortogonais Processo de Gram-Schmidt

GAN00007 – Introdução à Álgebra Linear -A1–2019.1

Profa. Ana Maria Luz Fassarella do Amaral

Vetores Ortogonais

Produto interno

Definição *Seja V um espaço vetorial sobre o corpo* IR. *Um* **produto interno** *em V é uma aplicação $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$ satisfazendo às seguintes propriedades:*

(*i*) $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$;

(*ii*) $\langle u + \lambda v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \lambda \langle v, w \rangle$;

(*iii*) $\langle v, v \rangle \geq 0$ *e* $\langle v, v \rangle = 0$ *se, e somente se,* $v = 0$.

Um espaço V com produto interno é chamado **euclidiano** *se ele tem dimensão finita*[1].

Exemplo Se $V = \mathbb{R}^n$, o produto interno canônico (também chamado produto escalar) é definido por

$$\langle x, y \rangle = x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

em que $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$.

Vetores Ortogonais

Definição *Sejam u, v vetores do espaço com produto interno V. Esses vetores são ortogonais* (*ou* perpendiculares) *se* $\langle u, v \rangle = 0$. *Nesse caso escrevemos* $u \perp v$.

Exemplo*: Seja* $V=IP_2(IR)$ *e sejam* $p=2x^2-2x+1$ *e* $q=3x^2+2x-2$, *p e q são ortogonais, isto é* $<p,q>=0$, *onde*

$$<p,q>=2.3+(-2).2+1.(-2)=0$$

Em $IP_2(IR)$ *se* $p= a_2x^2+a_1x+a_0$ *e* $q= b_2x^2+b_1x+b_0$

$$<p,q>:=a_2.b_2+a_1.b_1+a_0.b_0$$

Conjunto Ortogonal de Vetores

Diz-se que um conjunto de vetores $\{v_1, v_2,..., v_n\}$ de V (espaço vetorial euclidiano) é ortogonal se dois vetores quaisquer distintos são ortogonais, isto é

$$\langle v_i, v_j\rangle=0 \text{ para } i\neq j$$

<u>Teorema:</u> Um conjunto ortogonal de vetores não-nulos $A= \{v_1, v_2,..., v_n\}$ é L.I.

Demonstração: quadro

- Lista 6: Questões 3,4,5a)

Norma

Definição *Seja V um espaço vetorial sobre o corpo* IR. *Uma* **norma** *em V é uma aplicação $\|\cdot\| : V \to [0, \infty)$ satisfazendo às seguintes propriedades:*

(i) $\|v\| > 0$ *se* $v \neq 0$;

(ii) $\|\lambda v\| = |\lambda| \; \|v\|$, *para* $\lambda \in \mathbb{K}$;

(iii) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$.

Se V possui uma norma, dizemos que V é um espaço **normado.**

O valor $\|v\|$ pode ser interpretado geometricamente como o comprimento do vetor v. Se $\|v\| = 1$, o vetor v é chamado **unitário.**

Seja V um espaço com produto interno. Consideremos (com abuso de notação) $\|v\| := \langle v, v\rangle^{1/2}$.

Vetores Ortogonais

Começamos justificando a definição de perpendicularidade dada acima.

Teorema (Pitágoras)

Seja V um espaço com produto interno e $\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}$. Então, se $x \perp y$, temos

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Demonstração: Basta desenvolver $\|x+y\|^2$:

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2,$$

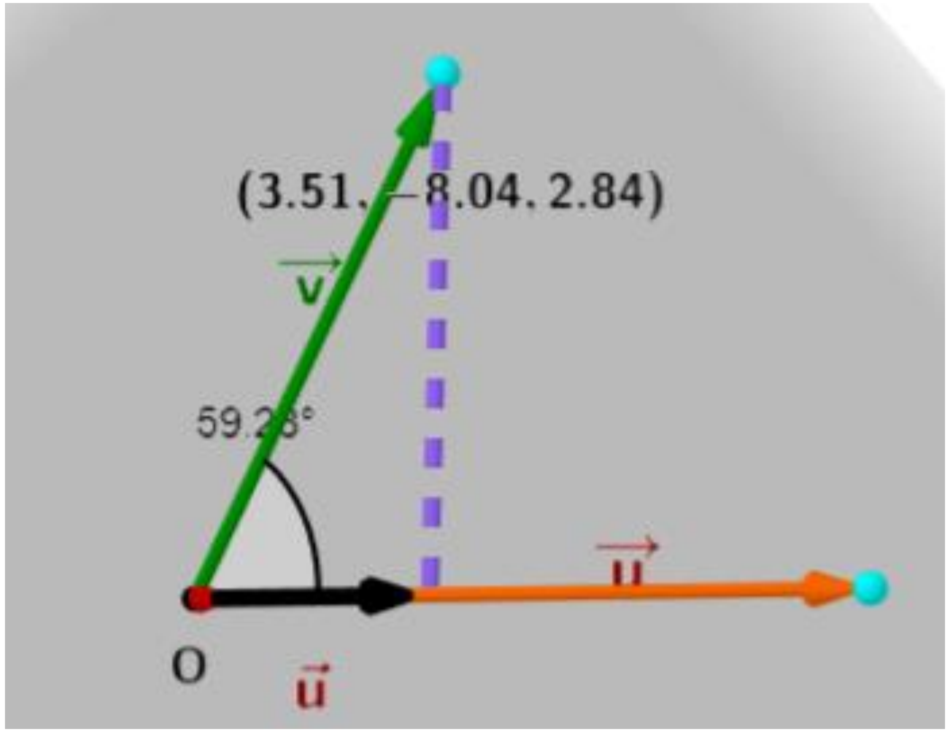
pois x e y são ortogonais.

$\square$

Suponhamos agora que V seja real. Então $\langle x+y, x+y\rangle = \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2$. Se vale o Teorema de Pitágoras, então $x \perp y$.

Processo de ortogonalização de Gram-Schmidt

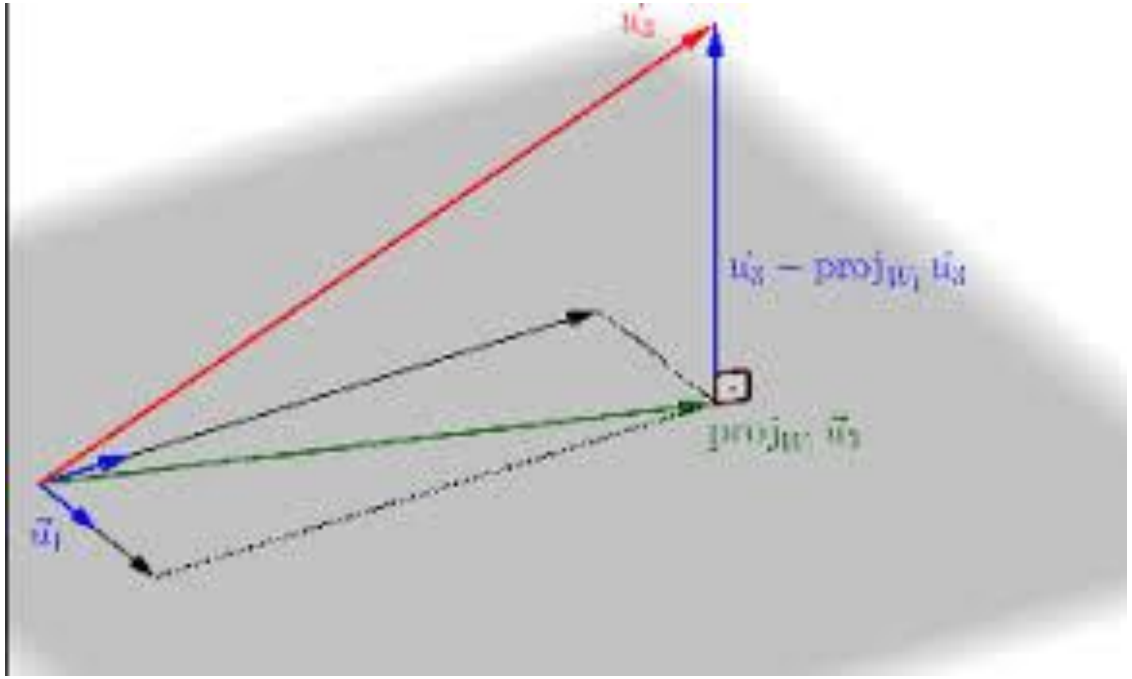
Gram-Schmidt: Ideia geométrica em $\mathbb{R}^2$



Explicação no quadro!

https://www.geogebra.org/m/EfMYAgQK

Gram-Schmidt: Ideia geométrica em $\mathbb{R}^3$



Explicação no quadro!

https://www.geogebra.org/m/qZJTjQrM

Processo de ortogonalização de Gram-Schmidt

Em matemática e análise numérica, o processo de Gram-Schmidt é um método para ortogonalização de um conjunto de vetores em um espaço V com produto interno. O processo de Gram–Schmidt recebe um conjunto finito, linearmente independente de vetores $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ e retorna um conjunto ortogonal $B' = \{w_1, \ldots, w_n\}$ que gera o mesmo subespaço S inicial. Onde

$$w_1 = v_1$$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2 , w_1 \rangle}{\langle w_1 , w_1 \rangle} w_1$$

$$w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3 , w_1 \rangle}{\langle w_1 , w_1 \rangle} w_1 - \frac{\langle v_3 , w_2 \rangle}{\langle w_2 , w_2 \rangle} w_2$$

$$\vdots$$

$$w_i = v_i - \frac{\langle v_i , w_1 \rangle}{\langle w_1 , w_1 \rangle} w_1 - \frac{\langle v_i , w_2 \rangle}{\langle w_2 , w_2 \rangle} w_2 - \cdots - \frac{\langle v_i , w_{i-1} \rangle}{\langle w_{i-1} , w_{i-1} \rangle} w_{i-1} \quad \text{con } i = 1, \ldots, n$$

Se $B' = \{w_1, \ldots, w_n\}$ é uma base ortogonal de um espaço com produto interno V,

$\tilde{B} = \left\{ \frac{w_1}{\|w_1\|}, \frac{w_2}{\|w_2\|}, \ldots, \frac{w_n}{\|w_n\|} \right\}$ é uma base ortonormal de V

Teorema(Gram-Schmidt)

- "Todo espaço de dimensão finita com produto interno (espaço euclidiano) possui uma base ortonormal"

- O Teorema de Gram-Schmidt garante a existência de uma infinidade de bases ortonormais.

Referências

- Algumas definições:

Notas de Hamilton Prado Bueno. Álgebra Linear: Um segundo Curso
Disponível em: https://docs.ufpr.br/~akirilov/ensino/2012/arquivos/alhb.pdf