Aula 09 – Espaços e Subespaços Vetoriais

GAN00007 – Int à Alg. Linear – A1
2019.1
Profa. Ana Maria Luz F. Amaral

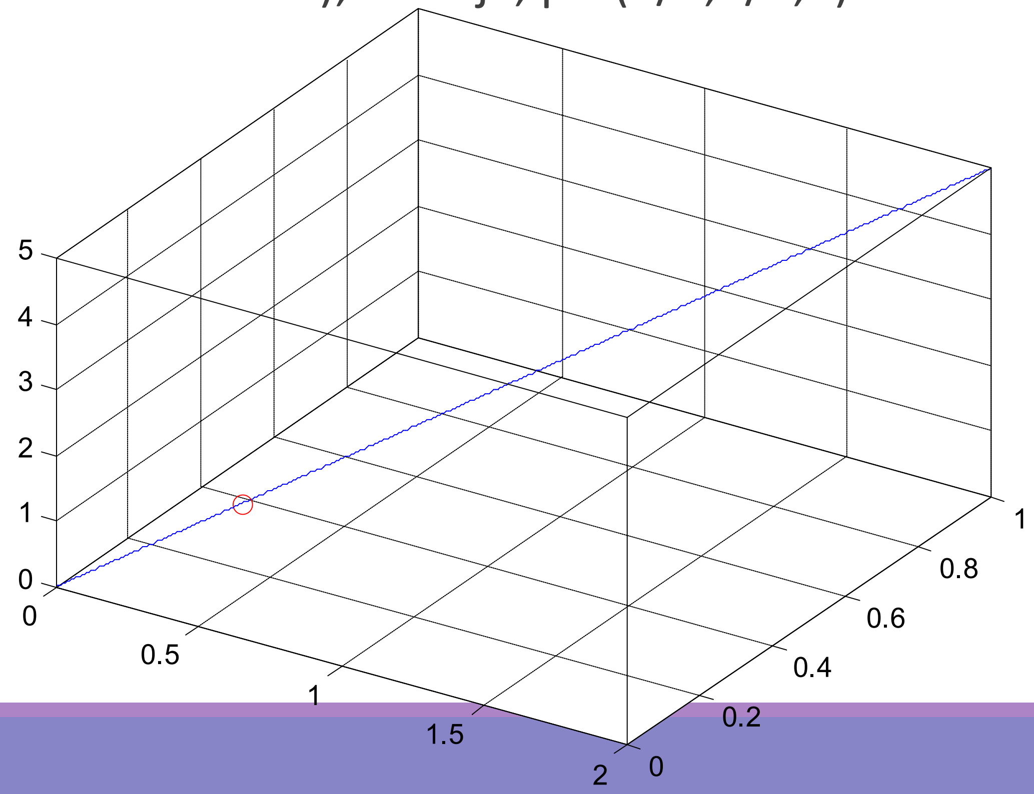
Motivação:

Resolva o sistema Ax=0 com $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \end{bmatrix}$

Motivação:

Tal sistema tem como solução $p = t\begin{bmatrix} 2/5 \\ 1/5 \\ 1 \end{bmatrix}$,onde t é um número real arbitrário.

Geometricamente podemos representar p como um ponto do IR^3 (para cada valor de t), ou seja, p=t(2/5,1/5,1)



Vetores no IR^n

Definição

Dois vetores $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ em R^n são ditos ***iguais*** se

$$u_1 = v_1,\ u_2 = v_2, \ldots, u_n = v_n$$

A ***soma*** $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ é definida por

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n)$$

e se k é um escalar qualquer, o ***múltiplo escalar*** $k\mathbf{v}$ de $\mathbf{v}$ é definido por

$$k\mathbf{v} = (kv_1, kv_2, \ldots, kv_n)$$

Propriedades do vetores em IR^n

Teorema 4.1.1 **Propriedades de Vetores em R^n**

Se $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ *e* $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ *são vetores em* R^n *e* k *e* l *são escalares, então:*

(*a*) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$

(*b*) $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$

(*c*) $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$

(*d*) $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$, *ou seja*, $\mathbf{u} - \mathbf{u} = \mathbf{0}$

(*e*) $k(l\mathbf{u}) = kl(\mathbf{u})$

(*f*) $l(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = l\mathbf{u} + l\mathbf{v}$

(*g*) $(k + l)\mathbf{v} = k\mathbf{v} + l\mathbf{v}$

(*h*) $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

O que é um espaço vetorial?

Um espaço vetorial é um **conjunto V não vazio** no qual estão definidas as operações de **soma** e **multiplicação por escalar**, e estas satisfazem os axiomas listados a seguir:

Axiomas para a adição de vetores:

A1) Se v e w pertencem a V, então v + w pertence a V;

A2) v + w = w + v para todo v e w em V;

A3) u + (v + w) = (u + v) + w para todo u, v e w em V;

A4) Existe um elemento 0 em V tal que v + 0 = v para todo v em V;

A5) Para cada v em V existe um elemento –v em V tal que v + (-v) = 0.

Axiomas para a multiplicação por escalar:

M1) Se v pertence a V, então para qualquer escalar a, o produto av pertence a V;

M2) a(v + w) = av + aw para todo v e w em V e para todo escalar A;

M3) (a + b)v = av + bv para todo v em V e para todos os escalares a e b;

M4) a(bv) = (ab)v para todo v em V e todos os escalares a e b.

M5) 1v = v para todo v em V.

Exemplos de Espaços Vetoriais Reais

Exemplo 2.1. $\mathbb{R}^2 = \{(x, y)/x, y \in \mathbb{R}\}$ *com as operações de adição e multiplicação por um escalar definidas como:*

$$(x, y) + (z, w) = (x + z, y + w), \quad \alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y)$$

Exemplo 2.2. *Os conjuntos* $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, ..., \mathbb{R}^n$ *com as operações de adição e multiplicação por escalar usuais.*

Exemplo 2.3. *O conjunto das matrizes* m *x* n *com as operações adição e multiplicação por escalar usuais.*

Exemplo 2.4. *O conjunto dos polinômios com coeficientes reais de grau* $\leq n$*, mais o polinômio nulo, em relação às operações usais de adição de polinômios e multiplicação por escalar.*

- OUTRAS OBSERVAÇÕES QUE SEGUEM DOS AXIOMAS

- EXERCÍCIO PARA CASA

Subespaços Vetoriais

Definição

Um subconjunto W de um espaço vetorial V é chamado um ***subespaço vetorial*** de V se W é um espaço vetorial em relação às operações de adição e multiplicação por escalar definidas em V.

Como W é subconjunto de V, alguns dos 10 axiomas de espaços vetoriais serão automaticamente satisfeitos em W.

Então, para verificar se um subconjunto W de um espaço vetorial V é um subespaço vetorial, temos apenas que verificar:

Subespaços Vetoriais

Teorema 5.2.1

Se W é um conjunto de um ou mais vetores de um espaço vetorial V, então W é um subespaço de V se, e somente se, valem as seguintes condições.

(a) *Se* $\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{v}$ *são vetores em W, então* $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ *está em W.*

(b) *Se l é um escalar qualquer e* $\mathbf{u}$ *é um vetor qualquer em W, então $l\,\mathbf{u}$ está em W.*

Exemplos de Subespaços Vetoriais Reais

- Todo espaço vetorial V admite no mínimo dois subespaços vetoriais: {0} e o próprio espaço V. Esses dois são subespaços triviais de V, os demais são denominados subespaços próprios de V.

Exemplo 2.5. $V = \mathbb{R}^2$ *e* $S = \{(x, 0)/x \in \mathbb{R}\}$ *é um subespaço vetorial de* V *com as operações usuais.*

Exemplo 2.6. $V = \mathbb{R}^2$ *e* $S = \{(x, 4 - 2x)/x \in \mathbb{R}\}$ *não é um subespaço vetorial* V *com as operações usuais.*

+ EXEMPLOS E COMENTÁRIOS

É subespaço?

a. Verifique se A = { [2s-t, s, 3t, s+t]; s e t reais} é um subespaço de IR^4.

b. Verifique se B={[x,y,z]; $x=y^2$} é subespaço de IR^3.

c. Verifique se $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & -a \\ b & a+b \end{bmatrix} ; a, b \in \mathbb{R} \right\}$ é subespaço vetorial de $M(2,2)$.

Para verificar se um subconjunto não vazio W de um espaço vetorial V é um subespaço vetorial, temos apenas que verificar:

i) Se u e v pertencem a W, u + v deve pertencer a W;

ii) Se u pertence a w, então para qualquer escalar a, o vetor au também deve pertencer a W.

É subespaço? Responda e Justifique

Retas que passam pela origem?

Retas que não passam pela origem?

Planos que passam pela origem?

Planos que não passam pela origem?

Semirreta $\{(x,y);\ y = 2x \text{ e } x > 0\}$?

Soluções de $Ax=b$ se b não for nulo?

Referências:

Material do curso de Álgebra Linear da Profa.: Anne Michelle Dysman (GAN)

Material do slide aula8_PARTE_2_2018_2

do curso de Int. Álgebra Linear 2018.2 da Profa.: Ana Maria Luz

Disponível em:

http://www.professores.uff.br/anamluz/gan00140-algebra-linear-g1-2018-2/