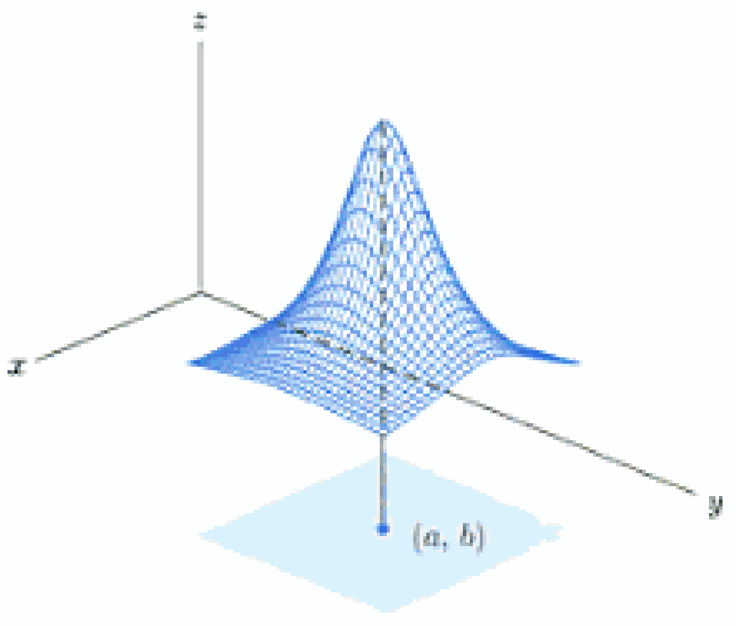
# FUNÇÃO DE DUAS VARIÁVEIS



(a)

# FUNÇÃO DE DUAS VARIÁVEIS

Trabalhamos até agora exclusivamente com funções reais de uma variável real, mas sabemos que existem situações práticas nas quais a função depende de duas (ou mais) variáveis. Por exemplo: de modo geral, a concentração C de uma droga no sangue é função de duas variáveis: a quantidade da droga ministrada na injeção e o tempo desde que a injeção foi aplicada.

# EXEMPLOS

1) Uma combinação de dois medicamentos está sendo testada no combate a certa infecção bacteriana. Os estudos mostraram que a duração de infecção em testes de laboratório pode ser modelada pela função $f(x,y)=x^2+2y^2-18x+2xy+120$, onde x é a dose do primeiro medicamento em centenas de mg e y é a dose do segundo medicamento em centenas de mg. Determine a dose de cada medicamento para que a duração da infecção seja mínima.

# EXEMPLOS

2) Certa doença pode ser tratada administrando pelo menos 70 unidades do medicamento C, mas este remédio pode produzir graves efeitos colaterais. Em busca de uma alternativa menos arriscada, um médico decide usar os medicamentos A e B, que não produzem efeitos colaterais se a dose combinada dos dois medicamentos for menor que 60 unidades. O médico sabe que, quando x unidades do medicamento A e y unidades do B são administradas a um paciente, o efeito é equivalente ao de administrar z unidades do medicamento C, onde

$$z = 0{,}05(xy - 2x^2 - y^2 + 95x + 20y)$$

a) Para que doses x e y o nível equivalente z do medicamento C é máximo?

b) Se o médico administrar doses adequadas de A e B, será possível tratar a doença sem efeitos colaterais?

## 4.1 – Funções de duas variáveis

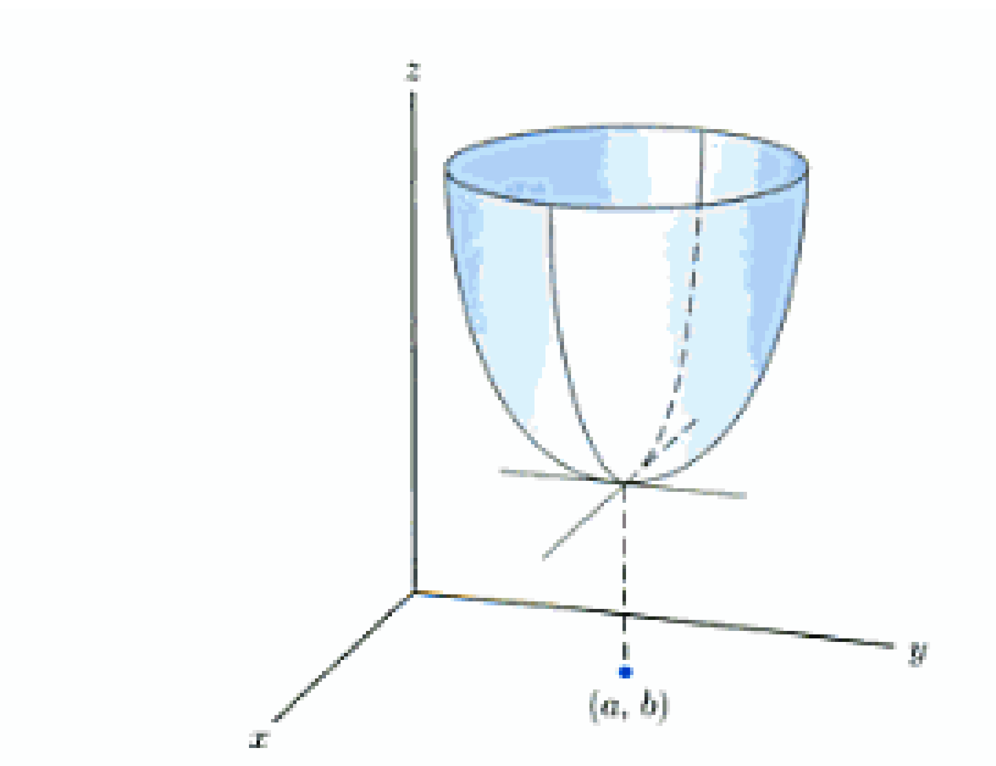
**Definição**: Uma **função real f de duas variáveis** é uma relação que, a cada par ordenado (x, y) de números reais pertencente a um dado conjunto D, associa um único número real z, indicado por f(x, y).

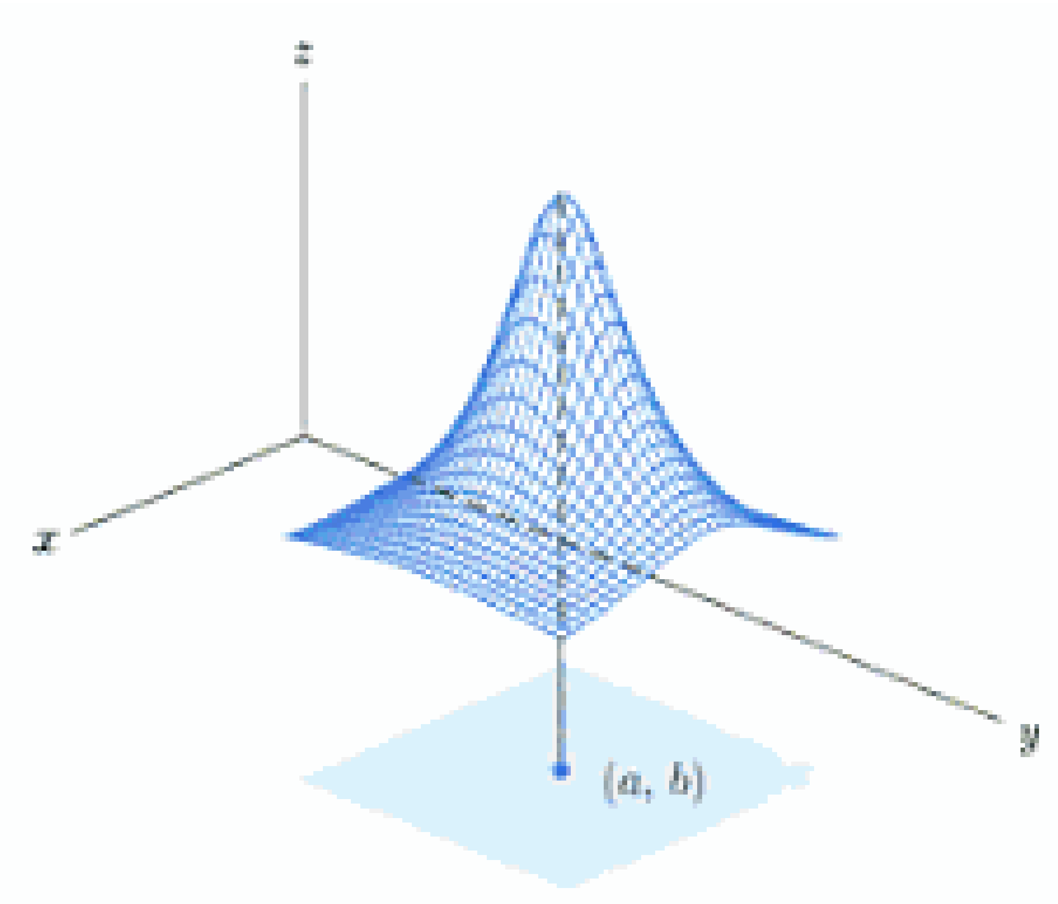
O conjunto D é chamado de **domínio** da função e o número z = f(x, y) é chamado de **imagem** ou **valor** de (x, y) por f.

Na equação z = f(x, y) chamamos z de variável dependente e x e y de variáveis independentes.

Em geral, utilizamos apenas uma expressão em x e y para especificar f(x, y). Nesse caso, fica subentendido que o domínio da função f é o conjunto de todos os pares ordenados de números reais para os quais a expressão é válida.

# EXEMPLOS DE GRÁFICOS




(a)

# EXEMPLOS

Seja $f(x, y) = xe^y + \ln x$. Determine o domínio de f e calcule f(1, 0) e f(2, 2).

Solução: A expressão $xe^y$ é definida para todos os números reais x e y e ln x é definido apenas para $x > 0$, então o domínio de f é o conjunto de todos os pares ordenados (x, y) de números reais tais que $x > 0$. Temos que $f(1, 0) = 1.e^0 + \ln 1 = 1$ e $f(2, 2) = 2e^2 + \ln 2 \cong 15{,}5$

O Quociente de Inteligência (QI) de uma pessoa é dado pela função $f(m, a) = \dfrac{100m}{a}$ onde m é a idade mental e a é a idade cronológica. Calcule: a) f(12, 11); b) f(16, 17)

Solução: a) $f(12, 11) = \dfrac{1200}{11} \cong 109{,}1$ b) $f(16, 17) = \dfrac{1600}{17} \cong 94{,}12$

**Observação**: Funções de três ou mais variáveis são definidas por uma extensão da definição de função de duas variáveis.

Exemplo: $f(x, y, z) = xy + xz + yz$

# DERIVADAS PARCIAIS

Em muitos problemas que envolvem funções de duas variáveis, o objetivo é determinar a taxa de variação de uma função em relação a uma das variáveis enquanto a outra é mantida constante. Vamos supor, por exemplo, que a concentração $C = f(x, t)$ de uma droga no sangue é função da quantidade x de droga injetada e do tempo t desde que a droga foi injetada. Se t permanece constante, a taxa de variação de C em relação a x descreve a concentração da droga no sangue em função da quantidade injetada. Se x permanece constante, a taxa de variação de C em relação a t descreve a concentração da droga no sangue em função do tempo.

Dada uma função de duas variáveis $z = f(x, y)$, suponha que o valor de y seja mantido constante e o valor de x varie livremente. Nesse caso, f se torna função apenas de x e podemos calcular a sua derivada da forma usual. Esta derivada é chamada de **derivada parcial de f em relação a x** e representada por

$$f_x \text{ ou } \frac{\partial z}{\partial x}$$

Exemplo: (quadro)

Analogamente, se mantivermos x fixo e permitirmos que y varie, teremos uma função apenas da variável y. Neste caso, a derivada é chamada de **derivada parcial de f em relação a y** e representada por

$$f_y \text{ ou } \frac{\partial z}{\partial y}$$

Para o exemplo dado temos: $f_y(x, y) = x^2 3y^2 + 1 = 3x^2y^2 + 1$

Podemos obter uma definição formal para a derivada parcial usando uma expressão análoga à que define a derivada para funções de uma variável.

**Definição**: Seja f uma função real de duas variáveis reais x e y.

**A derivada parcial de f em relação a x** é a função tal que

$$f_x(x, y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \text{ se o limite existir}$$

**A derivada parcial de f em relação a y** é a função tal que

$$f_y(x, y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \text{ se o limite existir}$$

**Observação**: Na prática, para achar $f_x$ consideramos y como constante e derivamos f em relação a x utilizando as regras de derivação para funções de uma variável; para achar $f_y$ consideramos x como constante e derivamos f em relação a y.

Exemplos: Quadro

# REFERÊNCIAS


- Lopes, Carla do N.; Cardoso, Maria Emília N. Apostila de Tópicos de Matemática Aplicada. UFF, 2016.
- Thomas, George B. Cálculo, vol 2. 11 ª edição. São Paulo: Addison Wesley, 2009.