Para atividade do 07/05/19
A ser entregue dia 09/05/19

Profa. Ana Maria Luz Fassarella do Amaral

Introdução à Álgebra Linear – A1 – 2019.1

Combinação linear e espaço gerado

Sejam $v_1, v_2, \ldots, v_m$ vetores em $\mathbb{R}^n$ e $a_1, a_2, \ldots, a_m$ números reais.

Um vetor da forma $u = a_1v_1 + a_2v_2, + \cdots + a_mv_m$ é chamado de combinação linear de $v_1, v_2, \ldots, v_m$.

O conjunto de todas as combinações lineares de $v_1, v_2, \ldots, v_m$,

$$ger\{v_1, v_2, \ldots, v_m\} = \{a_1v_1 + a_2v_2, + \cdots + a_mv_m; a_1, a_2, \ldots, a_m \in \mathbb{R}\}$$

é chamado de **subconjunto gerado** por $v_1, v_2, \ldots, v_m$.

Outra notação: $ger\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}=[v_1,v_2,\ldots,v_n]$

Obs.: Um subespaço V é dito **soma direta** de U e W se e só se V é gerado pelos vetores de U e W e, além disso, $U \cap W = \{0\}$. Nesse caso representamos $V = U \oplus W$.

Exemplo 1:

Para qual valor de k será o vetor $u = (1, -2, k)$ em $\Re^3$ uma combinação linear dos vetores $v = (3, 0, -2)$ e $w = (2, -1, -5)$?

Solução. Faça $u = a(3, 0, -2) + b(2, -1, -5) = (3.a + 2b, -b, -2.a - 5b)$

Forme o sistema:

$$\begin{cases} 3a + 2b = 1 \\ -b = -2 \\ -2a - 5b = k \end{cases}$$

Pelas duas primeiras equações, $a = -1$ e $b = 2$. Substitua na última equação para obter $k = -8$.

- Você também pode chegar a este resultado através de operações elementares na matriz aumentada associada ao sistema.

Exemplo 2: *Considere os subespaços de* $\mathbb{R}^3$*:*

$$U = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\right\} \quad e \quad W = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0\right\}$$

Temos que $U + W = \mathbb{R}^3$*, mas não como soma direta.*

Vamos determinar um conjunto de geradores para U e W. Um elemento de U pode ser escrito como $(x, y, z) = (0, y, z) = y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)$. Assim, temos: $U = [(0, 1, 0), (0, 0, 1)]$. Um elemento de W pode ser escrito da forma $(x, y, z) = (x, 0, z) = x(1, 0, 0) + z(0, 0, 1)$. Assim, $W = [(1, 0, 0), (0, 0, 1)]$.

Desse forma, temos que $U + W = [(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)]$, pois é a união dos conjuntos geradores de U e de W. Como o conjunto $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ gera todo o $\mathbb{R}^3$, uma vez que qualquer elemento $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ pode ser escrito como $(x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)$, temos que $U + W = \mathbb{R}^3$.

Mas, $U \cap W = [(0, 0, 1)]$, ou seja, $U \cap W$ é diferente do elemento neutro do $\mathbb{R}^3$, assim, $\mathbb{R}^3 = U + W$, mas não como soma direta.

Dependência e Independência Linear

Sejam $v_1, v_2, \ldots, v_m$ vetores em $\mathbb{R}^n$

Se algum destes vetores pode ser escrito como combinação linear dos outros, dizemos que

$$\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$$

é um conjunto **linearmente dependente** (LD). Caso contrário, dizemos que este conjunto é **linearmente independente** (LI)

Como podemos descobrir se algum destes vetores pode ser escrito como combinação linear dos outros?

Dependência e Independência Linear

Um conjunto $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ é linearmente independente se e somente se a única maneira de obtermos

$$a_1v_1 + a_2v_2, + \cdots + a_mv_m = 0$$

é tomando todos os coeficientes nulos, isto é, fazendo $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $\ldots$, $a_m = 0$.

Exemplo:

Determine m para que o conjunto $\{(2, -3, 2m), (1, 0, m+4), (-1, 3, m-2)\}$ seja L.I.

Solução1.

Considere a equação

$x(2, -3, 2m) + y(1, 0, m + 4) + z(-1, 3, m - 2) = (0, 0, 0)$. Daí, obtemos o sistema homogêneo

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ -3x + 3z = 0 \\ 2mx + (m+4)y + (m-2)z = 0 \end{cases}$$

Observe que este sistema é homogêneo. Para que { (2,-3,2m),{1,0,m+4},(-1,3,m-2)} seja L.I, na combinação linear acima, os escalares x,y e z devem ser iguais a sero, ou seja queremos que o sistema homogêneo acima admita somente a solução trivial.

Para que o conjunto dado seja L.I, o determinante da matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 3 \\ 2m & m+4 & m-2 \end{bmatrix}$$

tem que ser não nulo.

Mas o det A = $6m - 18$. Logo, $m \neq 3$.

Atividade para 09/05/2019.

estudar as definições de

- combinação linear
- subespaço gerado
- conjunto linearmente dependente (LD)
- conjunto linearmente independente (L.I)

e ver exemplos destas.

Entregar o exercício abaixo

a) Determine m para que o conjunto

$\{(1,0,-1),(1,1,0),(m,1,-1)\}$ seja L.D

b) Para o valor de m obtido no item a

determine o subespaço do $\mathbb{R}^3$

gerado pelo conjunto

$\{(1,0,-1),(1,1,0),(m,1,-1)\}$

Idéia:

$(x,y,z) = k_1(1,0,-1) + k_2(1,1,0) + k_3(m,1,-1)$