UFF – Departamento de Análise
Profa. Ana Maria Luz F. Amaral - GAN00007 – Introdução à Álgebra Linear -A1– 2019.1

Lista de Exercícios 7 - Transformações Lineares

1- Mostre que as funções abaixo são transformações lineares.

a) $T:IR^2 \to IR^2$ tal que $T(x,y)=(2x+y,x+3y)$

b) $T:IR^2 \to IR^3$ tal que $T(x,y)=(x+y,x-y,x)$

c) $T:IR^3 \to IR^2$ tal que $T(x,y,z)=(2x+y-z,x+2y)$

2 - Considere a função Tr: M(n,n)→IR (traço) definida por $Tr(A)=a_{11}+a_{22}+a_{33}+...+a_{nn}$. Mostre que Tr é uma transformação linear.

3- Determine a transformação linear tal que $T(-1,1)=(3,2,1)$ e $T(0,1)=(1,1,0)$. Encontre v pertencente a IR^2 tal que $T(v)=(5,3,2)$.

4- Uma editora publica um livro de Álgebra Linear em três edições diferentes: brochura, especial e de luxo. Cada livro precisa de uma determinada quantidade de papel e tela (para a capa). As quantidades necessárias (em gramas) são dadas pela matriz

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \text{Broch.} & \text{Espec.} & \text{Luxo} \end{array} \\ A= & \begin{bmatrix} 300 & 500 & 800 \\ \\ 40 & 50 & 60 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \textit{papel} \\ \\ \textit{tela} \end{array} \end{array}$$

Seja $x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ o vetor produção, onde x_1 é o número de livros brochuras, x_2 é o número de livros especiais e x_3 é o número de livros de luxo.

a) Encontre a transformação linear $T:IR^3 \to IR^2$ definida por T(**x**)=A**x** que descreve o quanto de papel e tela foram gastos para produzir o livro.

b) O vetor $y=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \in \mathrm{Im}(T)$ informa em y_1 o total de papel gasto pela editora para publicar o livro e em y_2 o total de tela necessários. De acordo com o item a) Qual a expressão do total de papel gasto (expressão de y_1 em função de x_1, x_2, x_3)? Qual a expressão do total de tela necessária (expressão de y_2 em função de x_1, x_2, x_3)?

5- Seja T:V→W uma transformação linear, chama-se núcleo da transformação linear ao conjunto

$$N(T)=\{v \epsilon V;\ T(v)=0\}$$

a) Mostre que N(T) é um subespaço vetorial de V.
b) Seja $T:IR^2 \to IR$ tal que T(x,y)=y-x, temos que

$$N(T)=\{(x,y)\ \epsilon\ IR^2;\ T(x,y)=y-x=0\}=\{(x,y)\ \epsilon\ IR^2;\ y=x\}.$$

Responda: (2,1) ϵ N(T)? (3,3) ϵ N(T)?

6- Seja T:V→W uma transformação linear, chama-se imagem da transformação linear ao conjunto

$$Im(T)=\{w \epsilon W;\ w=T(v) \text{ para algum } v \epsilon V\}$$

a) Mostre que Im(T) é um subespaço vetorial de W.
b) Seja $T:IR^2 \to IR^2$ tal que T(x,y)=(x+y,2x+2y), temos que

$$Im(T)=\{(a,b) \in IR^2;\ (a,b)=T(x,y)=(x+y,2x+2y)\} \Rightarrow \begin{cases} x+y=a \\ 2x+2y=b \end{cases},$$

para que este sistema tenha solução devemos ter $2a-b=0$. Logo

$$Im(T)=\{(a,b) \in IR^2;\ 2a-b=0\}$$

Responda: $(1,2) \in Im(T)$? $(6,3) \in Im(T)$?

7- Seja $T:P_2(IR) \to P_2(IR)$ a transformação linear definida por

$$T(ax^2+bx+c)=(a+2b)x+(b+c)$$

a) $-4x^2+2x-2$ pertence a N(T)?
b) x^2+2x+1 pertence a Im(T)?
c) Encontre uma base para N(T)? Qual a dimensão de N(T)?
d) T é injetora?
e) Encontre uma base para Im(T)? Qual a dimensão de Im(T)?
f) T é sobrejetora?

8 - Seja $T:M_{2x2}(IR) \to M_{2x2}(IR)$ a transformação linear definida por

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} a+b & b+c \\ a+d & b+d \end{bmatrix}$$

a) Encontre uma base para N(T)? Qual a dimensão de N(T)?
b) T é injetora?
c) Encontre uma base para Im(T)? Qual a dimensão de Im(T)?
d) T é sobrejetora?

9- Dada a transformação linear $T: IR^3 \to IR^3$ dada por

$$T(x,y,z)=(x+y,y-z),$$

E considere as bases A={(1,1,1), (0,0,1), (-1,1,1)} e B={(3,0), (1,1)} para o IR^3 e IR^2 respectivamente. Determine:

a) $[T]_B^A$

b) Sendo v=(5,1,-2) (coordenadas em relação à base canônica do IR^3), calcular $[T(v)]_B$ utilizando a matriz encontrada em a) e lembrando que $[T(v)]_B=[T]_B^A\,[v]_A$.

10- Seja a transformação $T: IR^3 \to IR^2$ definida pela matriz

$$M=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

a) Escreva a lei que define a transformação linear.
b) Sejam $A=\{e_1, e_2, e_3\}$ e $B=\{e_1,e_2\}$ as bases canônicas respectivamente do IR^3 e IR^2. Encontre a matriz de T em relação a A e B ($[T]_B^A$) .

11- Sejam $T_1: IR^2 \to IR^3$ e $T_2: IR^2 \to IR^3$ transformações lineares definidas por:
$T_1(x,y)=(x+2y,\ 2x-y,\ x)$ e $T_2(x,y)=(-x,\ y,\ x+y)$
Sejam $A=\{e_1, e_2\}$ e $B=\{e_1,e_2,e_3\}$ as bases canônicas respectivamente do IR^2 e IR^3. Encontre:

a) $[T_1]_B^A$ e $[T_2]_B^A$

b) $[T_1+T_2]_B^A$

c) $[3T_1-2T_2]_B^A$

12- Sejam $V=IR^2$, A={(1,1),(2,1)} e B={(1,0),(0,1)} bases do IR^2.

a) Determine a matriz de mudança de base de A para a base B (representada por $[I]_B^A$).

b) Que relação pode ser estabelecida entre $[v]_B$ e $[v]_A$ usando a matriz de I em relação às bases A e B?

GABARITO - Lista 7

1- a) T:$IR^2 \to IR^2$ tal que $T(x,y)=(2x+y,x+3y)$

Prova. Sejam (x, y) e (z, w) vetores do $\Re^2$.

$$T((x,y)+(z,w)) = T(x+z,y+w) = (2(x+z)+(y+w),(x+z)+3(y+w)) =$$
$$= ((2x+y)+(2z+w),(x+3y)+(z+3w)) =$$
$$= ((2x+y),(x+3y)) + ((2z+w),(z+3w)) = T(x,y)+T(z,w).$$
$$T(\alpha(x,y)) = T(\alpha x,\alpha y) = (2\alpha x+\alpha y,\alpha x+3\alpha y) = (\alpha(2x+y),\alpha(x+3y)) =$$
$$= \alpha(2x+y,x+3y) = \alpha T(x,y).$$

b) T:$IR^2 \to IR^3$ tal que $T(x,y)=(x+y,x-y,x)$

Prova. Sejam (x, y) e (z, w) vetores do $\Re^2$.

$$T((x,y)+(z,w)) = T(x+z,y+w) = ((x+z)+(y+w),(x+z)-(y+w),x+z) =$$
$$= ((x+y)+(z+w),(x-y)+(z-w),x+z) =$$
$$= ((x+y),(x-y),x) + ((z+w),(z-w),z) = T(x,y)+T(z,w).$$
$$T(\alpha(x,y)) = T(\alpha x,\alpha y) = (\alpha x+\alpha y,\alpha x-\alpha y,\alpha x) = (\alpha(x+y),\alpha(x-y),\alpha x) =$$
$$= \alpha(x+y,x-y,x) = \alpha T(x,y).$$

c) T:$IR^3 \to IR^2$ tal que $T(x,y,z)=(2x+y-z,x+2y)$

Prova. Sejam (x, y,z) e (a, b,c) vetores do $\Re^3$.

$$T((x,y,z)+(a,b,c)) = T(x+a,y+b,z+c) = (2(x+a)+(y+b)-(z+c),(x+a)+2(y+b)) =$$
$$= ((2x+y-z)+(2a+b-c),(x+2y)+(a+2b)) =$$
$$= ((2x+y-z),(x+2y)) + ((2a+b-c),(a+2b)) = T(x,y,z)+T(a,b,c).$$
$$T(\alpha(x,y,z)) = T(\alpha x,\alpha y,\alpha z) = (2\alpha x+\alpha y-\alpha z,\alpha x+2\alpha y) = (\alpha(2x+y-z),\alpha(x+2y)) =$$
$$= \alpha(2x+y-z,x+2y) = \alpha T(x,y,z).$$

3- Se (x,y) $\in \Re^2$, $(x,y)=a(-1,1)+b(0,1)$

$$\begin{cases} a=-x \\ a+b=y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-x \\ b=x+y \end{cases} \Rightarrow (x,y) = -x(-1,1)+(x+y)(0,1)$$

$$T(x,y) = -xT(-1,1)+(x+y)T(0,1) = (-x(3,2,1)+(x+y)(1,1,0) = (-2x+y,-x+y,-x)$$

Logo, fazendo $(-2x+y,-x+y,-x)=(5,3,2)$

$$\begin{cases} -2x+y=5 \\ -x+y=3 \\ -x=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases}$$. Daí, v=(-2,1).

4- a) $T(x_1,x_2,x_3)=(300x_1+500x_2+800x_3,40x_1+50x_2+60x_3)$

b) $y_1=300x_1+500x_2+800x_3$ gramas de papel e $y_2=40x_1+50x_2+60x_3$ gramas de tela

5- b) (2,1) ϵ N(T)? NÃO (3,3) ϵ N(T)? SIM

6- b) (1,2) ϵ Im(T)? SIM (6,3) ϵ Im(T)? NÃO

7) a) sim, verifique que $T(-4x^2+2x-2)=0$ b) não c){2x^2-x+1} é uma base de N(T) , dim N(T)=1
d) não é injetora e){x, 1} é uma base de Im(T), dim N(T)=2 f) não é sobrejetora

8) a) $N(T)=\left\{\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right\}$, de modo que N(T) não tem base, dim N(T)=0.

b) T é injetora pois $N(T)=\left\{\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right\}$, c) $\operatorname{Im}(T)=\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}\right\}$, dim Im(T)=4

d) T é sobrejetora

9- a) $[T]_B^A=\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix}$ b) $[v]_A=(3,-3,-2)$ então $[T(v)]_B=(1,3)$

10 - a) T(x,y,z)=(x+y+z, x+2y +3z)

b) $[T]_B^A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}$, é claro que $[T]_B^A$=M usada na definição de T pois A e B são as bases canônicas de IR^3 e IR^2.

11- a) $[T_1]_B^A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$, $[T_2]_B^A=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$

b) use que $[T_1+T_2]_B^A=[T_1]_B^A+[T_2]_B^A=\begin{bmatrix}0 & 2\\ 2 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}$

c) use que $[3T_1-2T_2]_B^A=3[T_1]_B^A-2[T_2]_B^A=\begin{bmatrix}5 & 6\\ 6 & -5\\ 1 & -2\end{bmatrix}$

12- a) $[I]_B^A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ b) a) $[v]_B=[I]_B^A[v]_A$

"Aprender não tem atalhos!"