Universidade Federal Fluminense/ Departamento de Análise
GAN 00007 –Introdução à Álgebra Linear – Turma A1/ Professora Ana Maria Luz F. Amaral

Lista de Exercícios – Operadores Lineares I

<u>Recapitulando:</u> Vimos na Aula 6 que: Se A é ortogonal ($A^{-1}=A^T$) então $\det(A^{-1})=1$ ou -1. Como falamos no final da aula passada (aula 18), isto tem relação como o conceito de operador ortogonal:

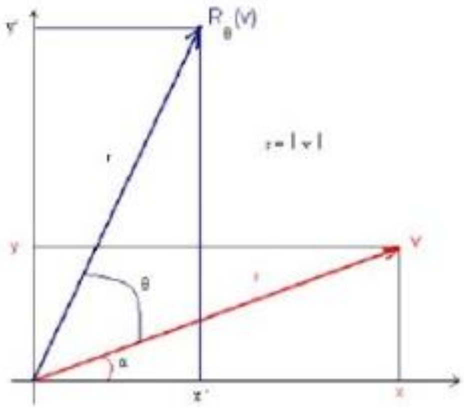
Seja V um espaço vetorial euclidiano. Um operador T:V→V é *ortogonal* se preserva o módulo de cada vetor, isto é, se para qualquer $v \in V$:

$$\|T(v)\| = \|v\|$$

Para um operador ortogonal T temos que $[T]^{-1}=[T]^T$. Como exemplo deste tipo de operador mencionamos o operador de rotação que é definido pela matriz de rotação apresentada na aula anterior (aula17) quando falávamos das transformações lineares mencionadas implicitamente no Vídeo: Pixar: A matemática por trás dos filmes.

$$R_\theta \quad : \quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$R_\theta(x,y) \quad = \quad (x',y')$$
$$R_\theta(x,y) = (x\cos\theta - y\sin\theta,\ x\sin\theta + y\cos\theta)$$

Matricialmente
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$
Podemos ver neste caso que matriz de uma rotação é:
$$[R_\theta] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$



1- Seja $T: IR^2 \to IR^2$ um operador linear ortogonal definido por

$$T(x,y) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y, -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \right)$$

e $B_1=\{e_1,e_2\}$ a base canônica do IR^2, encontre a partir de B_1 uma base ortonormal para o IR^2, usando o seguinte resultado:
"Um operador linear ortogonal T transforma bases ortonormais em bases ortonormais, isto é, se $\{v_1,v_2,...,v_n\}$ é base ortonormal de V então $\{T(v_1),T(v_2), ...,T(v_n)\}$ é também base ortonormal de V"

2- Sejam T_1: $IR^2 \to IR^2$ e T_2: $IR^2 \to IR^2$ operadores lineares definidas por:

$$T_1(x,y)=(x+y, -x+y) \text{ e } T_2(x,y)=(x, -x)$$

Sejam $A=\{e_1, e_2\}$ base canônica do IR^2 e $B=\{(3,1),(-3,1)\}$ outra base do IR^2. Encontre

a) $[T_1]_B^A$ *e* $[T_2]_B^A$

b) $[T_1+T_2]_B^A$ (dica: use que $[T_1+T_2]_B^A = [T_1]_B^A + [T_2]_B^A$)

c) $[3T_1-2T_2]_B^A$ (dica: use que $[3T_1-2T_2]_B^A = 3[T_1]_B^A - 2[T_2]_B^A$)

d) $[T_1 \circ T_2]_B^A$ (você pode usar que: $[T_1 \circ T_2]_B^A = [T_1]_B^A . [T_2]_B^A$)

3- Construa um exemplo do seguinte resultado: "A composta de duas transformações ortogonais é ortogonal, ou seja, o produto de duas matrizes ortogonais é uma matriz ortogonal".

4- A seguir dados operadores lineares T em IR^2. Verificar quais são inversíveis e, nos casos afirmativos, determinar uma fórmula para T^{-1}.

a) T: $IR^2 \rightarrow IR^2$, T(x,y)=(3x-4y,-x+2y)
b) T: $IR^2 \rightarrow IR^2$, T(x,y)=(x-2y,-2x+3y)
c) T: $IR^2 \rightarrow IR^2$, T(x,y)=(2x-y,-4x+2y)

5- Consideremos as seguintes bases do IR^2: A={(1,1),(0,-1)} e B={(2,-3),(-3,5)}.
a) Determinar a matriz de mudança de base: $[I]_B^A$.
b) Utilizar a matriz obtida no item a) para calcular $[v]_B$, sendo $[v]_A$=(2,3).
c) Determinar a matriz de mudança de base de B para A.

6. Seja o operador linear T: $\Re^2 \rightarrow \Re^2$ tal que T(x,y) = (x + y, x –y).
(a) Determine $[T]_B$, onde B = {(1,2), (0,1)}.
(b) Use a matriz encontrada em (a) para calcular $[T(v)]_B$, dado v = (5, 3).

7. Verificar se o operador linear T : $\Re^3 \rightarrow \Re^3$ definido por T(1, 1, 1) = (1, 0, 0), T(-2, 1, 0) = (0, -1, 0) e T(-1, -3, -2) = (0, 1, -1) é inversível, e, em caso afirmativo, determine T^{-1}(x, y, z).

8. Mostrar que o operador linear, no $\Re^3$, definido pela matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$ não é inversível.

Determinar v $\in \Re^3$ tal que T(v) = (6, 9, 15).

9. A base B é obtida da base canônica A do $\Re^2$ pela rotação de $\frac{\pi}{3}$rad. Calcular:

a) $[I]_B^A$ b) $[I]_A^B$

10. Sabendo que $[I]_B^A = \begin{bmatrix} -7 & 6 \\ -11 & 8 \end{bmatrix}$ e A={(1, 3), (2, -4)} determine a base B.

11. Verifique se o operador T: $\Re^2 \rightarrow \Re^2$, definido por T(x,y) = (3x+5y, 2x+3y) é inversível. Caso seja encontre uma fórmula para seu inverso.

12. Encontre a inversa de cada uma das matrizes ortogonais a seguir:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & sen\theta \\ 0 & -sen\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

13. - Classifique as afirmações abaixo como Verdadeiras (V) ou Falsas (F), caso sejam falsas reescreva a afirmação de forma a torná-la verdadeira.
a) Todo operador ortogonal é inversível. ( )
b) Todo operador ortogonal T preserva o ângulo entre dois vetores, isto é,o ângulo entre dois vetores u e v é igual ao ângulo entre T(u) e T(v). ( )
c) A composta de de duas transformações ortogonais não é uma transformação ortogonal ( )
d) As colunas (ou linhas) de uma matriz ortogonal são vetores ortonormais. ( )