Universidade Federal Fluminense/ Departamento de Análise
GAN 00007 –Introdução à Álgebra Linear – Turma A1/ Professora Ana Maria Luz F. Amaral

Gabarito da Lista de Exercícios 8 – Operadores Lineares I

1- $B_2=\left\{\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{-1}{2}\right),\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}$

4- a) $T^{-1}(x,y)=(x+2y,\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}y)$

b) $T^{-1}(x,y)=(-3x-2y,-2x-y)$

c) T não é inversível

5- a) $[I]_B^A=\begin{bmatrix}8 & -3\\ 5 & -2\end{bmatrix}$

b) $[v]_B=(7,4)$

c) $[I]_A^B=([I]_B^A)^{-1}=\begin{bmatrix}2 & -3\\ 5 & -8\end{bmatrix}$

6- $[T]_A=\begin{bmatrix}1 & -3\\ -1 & 4\end{bmatrix}$

7- a) a=-2 e b=-3

b) a=0 e b=-3

6. Seja o operador linear $T:\Re^2\to\Re^2$ tal que T(x,y) = (x + y, x –y).

(a) Determine $[T]_B$, onde B = {(1,2), (0,1)}.

(b) Use a matriz encontrada em (a) para calcular $[T(v)]_B$, dado v = (5, 3).

Solução. (a) T(1,2)=(3,-1), T(0,1)=(1,-1); (x,y) = x(1,2) + (y-2x)(0,1)

T(1,2) = (3,-1) = 3(1,2) + (-7)(0,1)

T(0,1) = (1,-1) = 1(1,2) + (-3)(0,1). Logo, $[T]_B=\begin{bmatrix}3 & 1\\ -7 & -3\end{bmatrix}$.

(b) Como, $[v]_B=\begin{bmatrix}5\\ -7\end{bmatrix}$, $[T(v)]_B=[T]_B[v]_B=\begin{bmatrix}3 & 1\\ -7 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\ -7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8\\ -14\end{bmatrix}$.

7. Verificar se o operador linear $T:\Re^3\to\Re^3$ definido por T(1, 1, 1) = (1, 0, 0), T(-2, 1, 0) = (0, -1, 0) e T(-1, -3, -2) = (0, 1, -1) é inversível, e, em caso afirmativo, determine $T^{-1}(x, y, z)$.

Solução. Observe que o conjunto {(1, 1, 1), (-2, 1, 0), (-1, -3, -2)} é uma base de $\Re^3$ e T está bem definido, pois conhecemos suas imagens. Então, por definição de

T^{-1}, $T^{-1}(1, 0, 0) = T^{-1}(x, y, z) = x\,T^{-1}(1, 0, 0) + (-y-z)T^{-1}(0, -1, 0) + (-z)T^{-1}(0, 1, -1)$.

Observando que {(1, 0, 0), (0, -1, 0), (0, 1, -1)} é também uma base de $\Re^3$, pois são LI ($\left(\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0\right)$ e que as imagens desses vetores são conhecidas, o operador T^{-1} está definido. Logo, existindo a T^{-1}, T é inversível.

Vamos calcular $T^{-1}(x, y, z)$. Expressando (x, y, z) em relação a esta base,

(x, y, z) = x(1, 0, 0) + (-y-z)(0, -1, 0) + (-z)(0, 1, -1), logo,

$T^{-1}(x, y, z) = x\, T^{-1}(1, 0, 0) + (-y-z)T^{-1}(0, -1, 0) + (-z)T^{-1}(0, 1, -1)$

$T^{-1}(x, y, z) = x\,(1, 1, 1) + (-y-z)\,(-2, 1, 0) + (-z)\,(-1, -3, -2)$

$T^{-1}(x, y, z) = (x + 2y + 3z,\ x - y + 2z,\ x + 2z)$.

8. Mostrar que o operador linear, no $\Re^3$, definido pela matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$ não é inversível. Determinar $v \in \Re^3$ tal que T(v) = (6, 9, 15).

Solução. Como det [T] = 0, T não é inversível.

Se v = (x, y, z), $[T(v)] = [T].\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+2y+3z \\ 2x+3y+4z \\ 3x+5y+7z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 15 \end{bmatrix}$. Daí,

$v = (z, 3 - 2z, z),\ z \in \Re$.

9. A base B é obtida da base canônica A do $\Re^2$ pela rotação de $\frac{\pi}{3}\text{rad}$. Calcular:

a) $[I]_B^A$ b) $[I]_A^B$

Solução. Se $B = (b_1, b_2)$, $b_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$ e $b_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$. $(1,\ 0) = a\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + b\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) \Rightarrow a = \frac{1}{2}$ e $b = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $(0, 1) = c\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + d\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) \Rightarrow c = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $d = \frac{1}{2}$. Logo,

$[I]_B^A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}; [I]_A^B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

10. Sabendo que $[I]_B^A = \begin{bmatrix} -7 & 6 \\ -11 & 8 \end{bmatrix}$ e A={(1, 3), (2, -4)} determine a base B.

Solução. $B = \{(a,b),(c,d)\}$

(1, 3) = -7(a,b) – 11(c,d), (2,-4) = 6(a,b) + 8(c,d). Logo, B={(3,-2), (-2,1)}.

11. Verifique se o operador $T: \Re^2 \to \Re^2$, definido por T(x,y) = (3x+5y, 2x+3y) é inversível. Caso seja encontre uma fórmula para seu inverso.

Solução. Sendo [T]=$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, det[T]=-1$\neq$ 0. Logo, T é inversível.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right] \Rightarrow T^{-1}(x,y) = (-3x+5y,\ 2x-3y).$$

12. Como as matrizes em a) e b) são ortogonais basta achar as transpostas pois $A^T=A^{-1}$ e $B^T=B^{-1}$.

13. a) Todo operador ortogonal é inversível. (**V**)

b) Todo operador ortogonal T preserva o ângulo entre dois vetores, isto é,o ângulo entre dois vetores u e v é igual ao ângulo entre T(u) e T(v). (**V**)

c) A composta de de duas transformações ortogonais não é uma transformação ortogonal (**F**)

Reescrevendo de forma correta: A composta de duas transformações ortogonais é também uma transformação ortogonal.

d) As colunas (ou linhas) de uma matriz ortogonal são vetores ortonormais. (**V**)