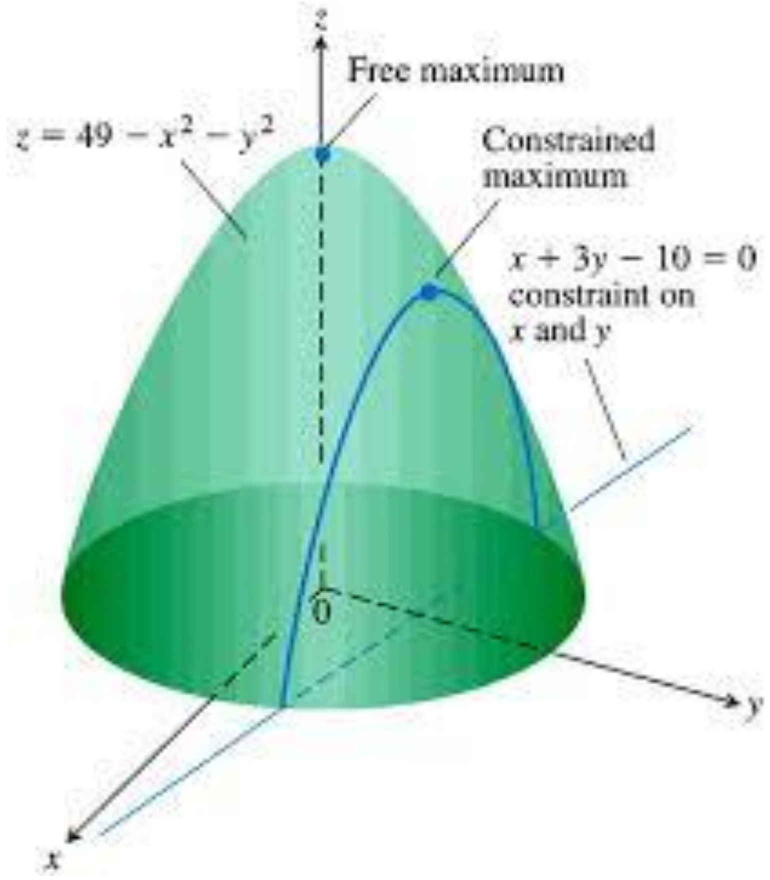
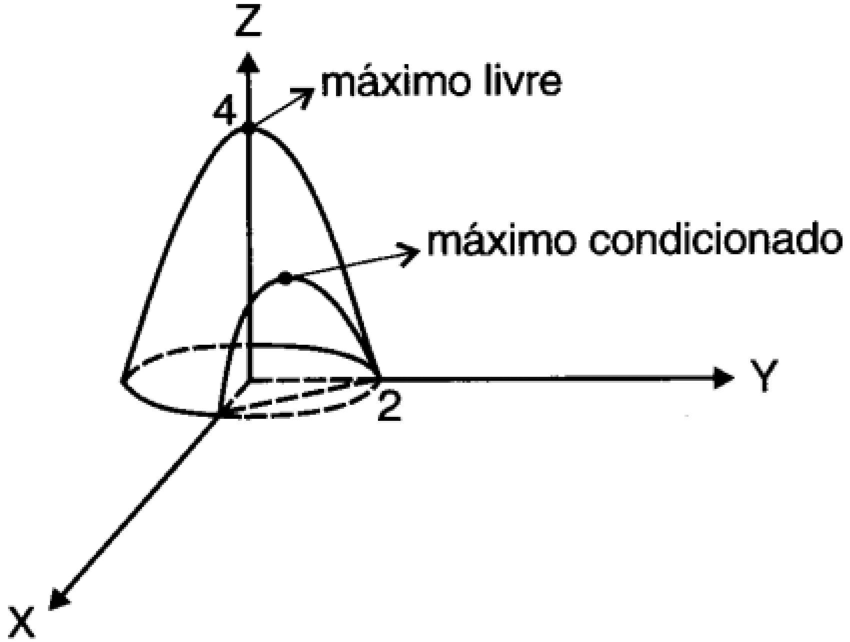
Multiplicadores de Lagrange





Multiplicadores de Lagrange

- Em matemática, em problemas de otimização, o método dos multiplicadores de Lagrange permite encontrar extremos de uma função de uma ou mais variáveis suscetíveis a uma ou mais restrições.

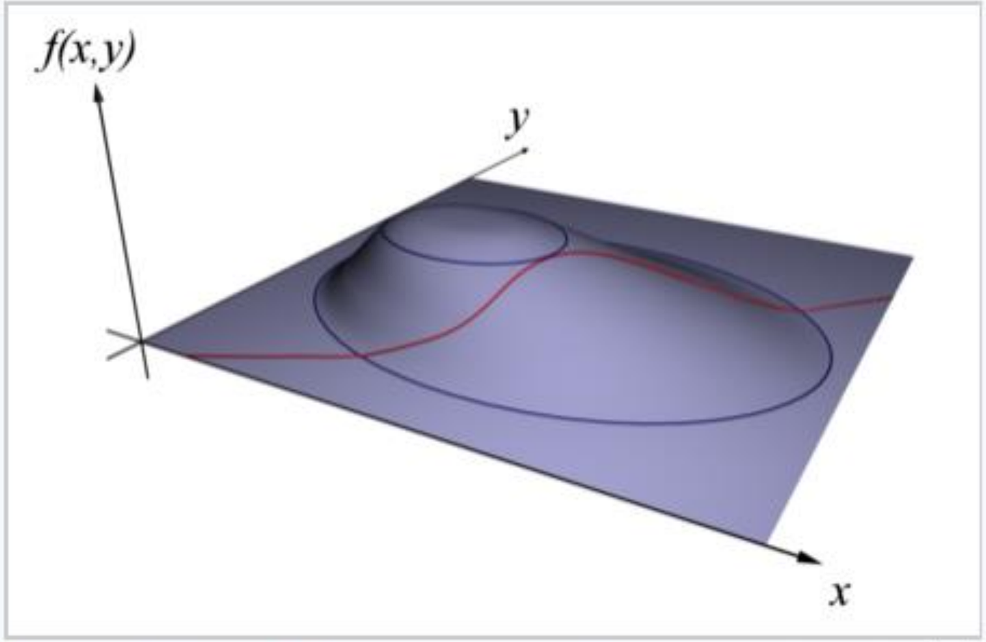


Figura 1: Encontrar *x* e *y* que maximizem $f(x,y)$ sujeito a uma condição (a vermelho) $g(x,y) = c$.

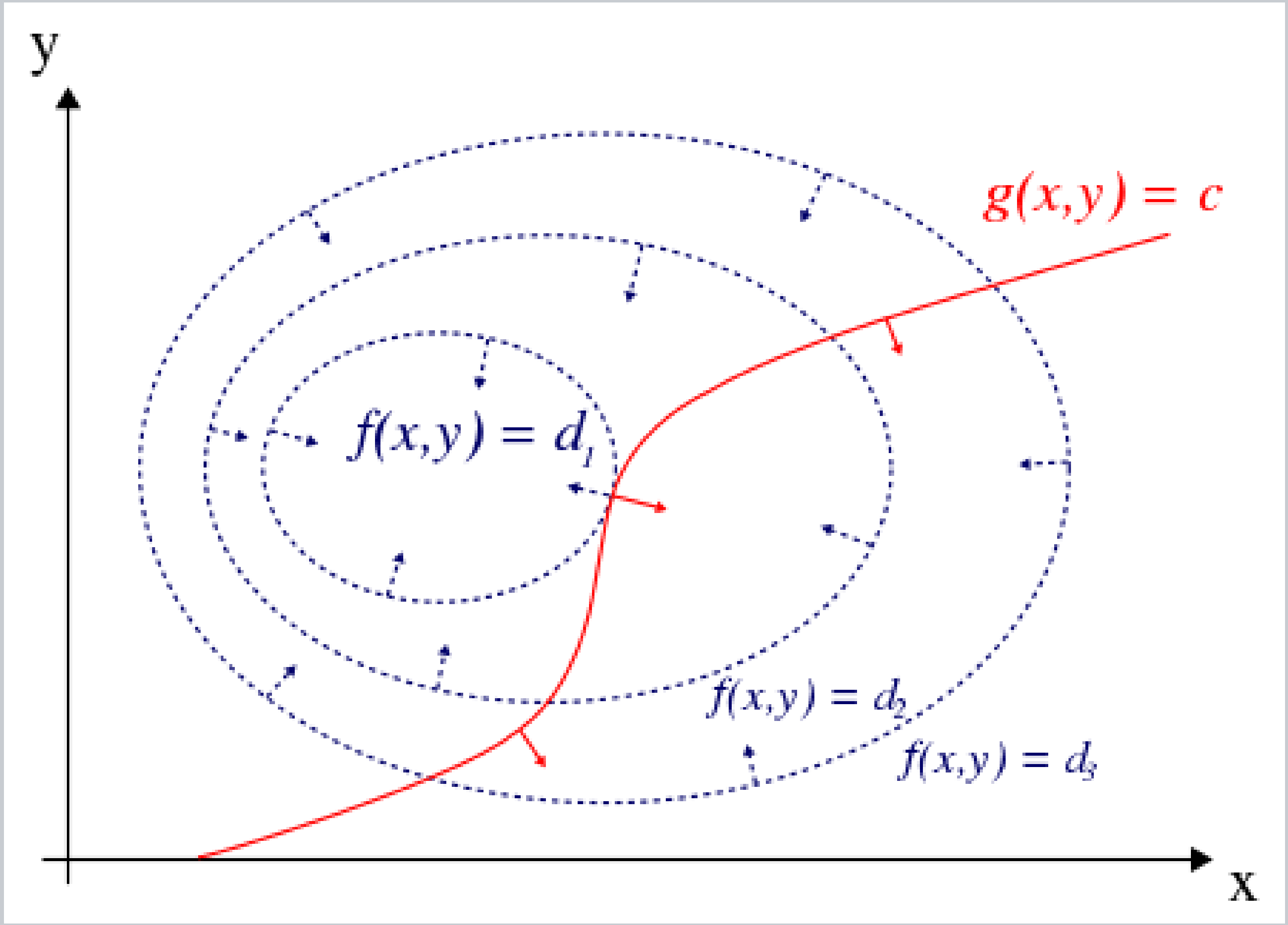
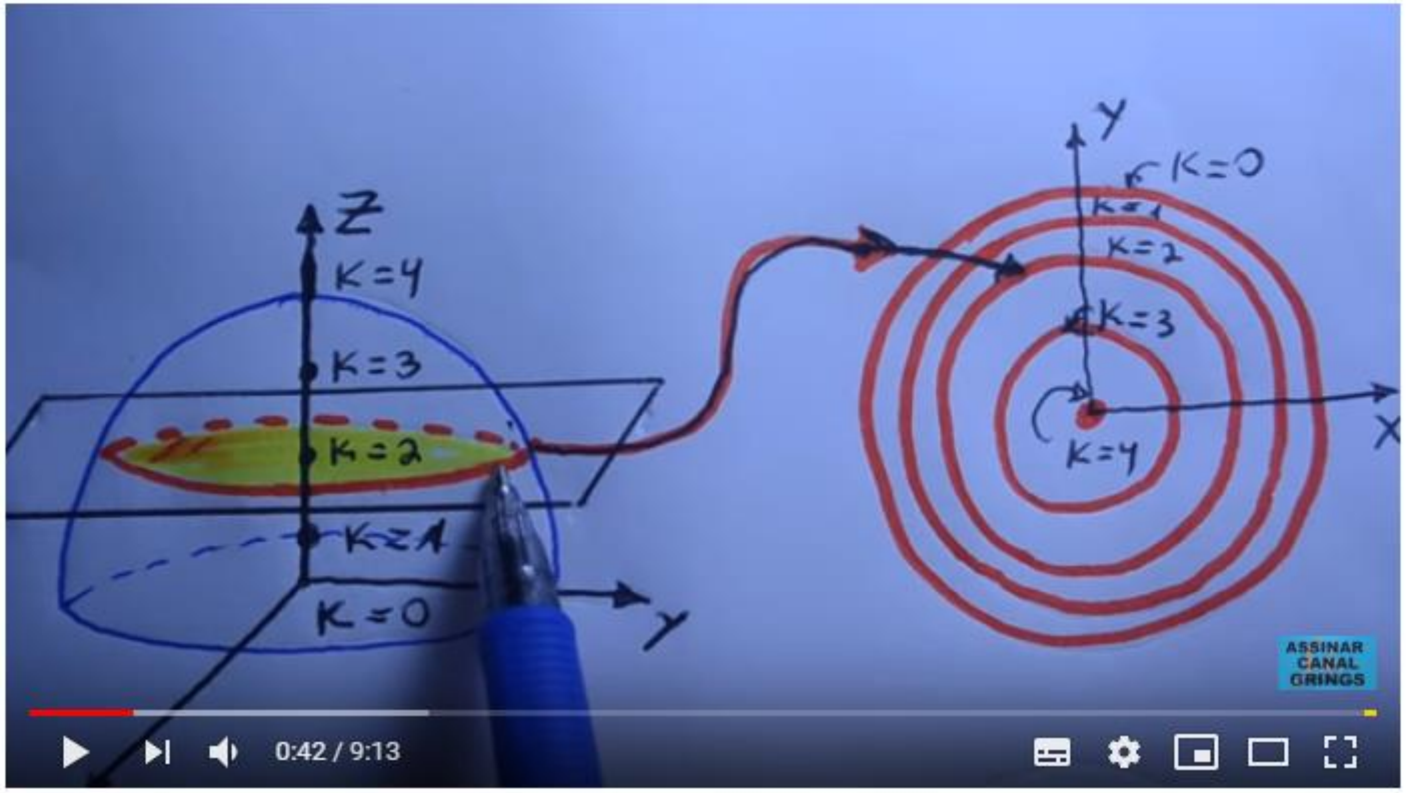


Figura 2: Curva de nível da Figura 1. A linha a vermelho indica a restrição $g(x, y) = c$. As linhas azuis são os contornos de $f(x, y)$. A solução ocorre no ponto em que as linhas vermelha e azul se tocam tangencialmente.[1]

Sobre curvas de Nível



https://www.youtube.com/watch?v=E6kO19Z3K8c

https://www.youtube.com/watch?v=wDZngwCNYtA

O método dos multiplicadores de Lagrange

O **método dos multiplicadores de Lagrange** se baseia no fato de que todo extremo relativo de uma função real f de duas variáveis x e y com uma restrição g(x, y) = k ocorre em um ponto crítico da função (de Lagrange):

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda(g(x, y) - k)$$

onde λ é uma nova variável (o multiplicador de Lagrange).

Para determinar os pontos críticos de F, calculamos suas derivadas parciais:

$$F_x(x, y, \lambda) = f_x(x, y) - \lambda g_x(x, y)$$
$$F_y(x, y, \lambda) = f_y(x, y) - \lambda g_y(x, y)$$
$$F_\lambda(x, y, \lambda) = -(g(x, y) - k)$$

E resolvemos o sistema de equações $\begin{cases} F_x(x, y, \lambda) = 0 \\ F_y(x, y, \lambda) = 0 \\ F_\lambda(x, y, \lambda) = 0 \end{cases}$

Isto é, resolvemos $\begin{cases} f_x(x, y) - \lambda g_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) - \lambda g_y(x, y) = 0 \\ -(g(x, y) - k) = 0 \end{cases}$

Os pontos (x_0, y_0) que fornecem os extremos de f com a restrição $g(x, y) = k$ estão entre os pontos determinados pelas duas primeiras coordenadas desses pontos críticos.

Resumo do método dos multiplicadores de Lagrange

Os pontos onde uma função real f de duas variáveis tem extremos relativos sujeitos à restrição $g(x, y) = k$ estão incluídos entre os pontos determinados pelas duas primeiras coordenadas das soluções (x_0, y_0, λ_0) do sistema

$$\begin{cases} f_x(x, y) = \lambda g_x(x, y) \\ f_y(x, y) = \lambda g_y(x, y) \\ g(x, y) = k \end{cases}$$

Uma desvantagem do método de Lagrange é que ele fornece somente os pontos críticos da função sem discriminar se é máximo, mínimo ou nenhum dos dois.

Exemplos

Existe uma versão do teste das derivadas parciais de segunda ordem que pode ser usada para determinar que tipo de extremo com restrição corresponde a cada ponto crítico (x_0, y_0), mas neste texto vamos supor que se f possui um máximo (ou mínimo) relativo com restrição em (x_0, y_0), ele será dado pelo maior (menor) dos valores de $f(x_0, y_0)$.

Exemplos:

1 – A função $f(x, y) = 2x^2 + y^2$ possui um valor mínimo com a restrição $x + y = 6$. Use o método dos multiplicadores de Lagrange para determinar esse mínimo.

2- Utilize o método dos multiplicadores de Lagrange para encontrar os valores de máximo e mínimo da função $f(x, y) = 42x + 28y$ com condição $xy = 600$.

Referências

- Lopes, Carla do N.; Cardoso, Maria Emília N. Apostila de Tópicos de Matemática Aplicada. UFF, 2016.
- https://pt.wikipedia.org/wiki/Multiplicadores_de_Lagrange
- http://www.pb.utfpr.edu.br/daysebatistus/maximos_minimos_donizetti.pdf