UFF – Departamento de Análise - Profa. Ana Maria Luz F. Amaral

GAN00007 – Introdução à Álgebra Linear -A1– 2019.1

Lista 10 : Diagonalização de Operadores e Formas Quadráticas no Plano

1. Seja o operador linear $T:\Re^3 \to \Re^3$ tal que $T(x,y,z) = (2y+2z,2x+2z,2x+2y)$. Determinar uma base ortonormal β de $\Re^3$ tal que $[T]_\beta$ seja diagonal

2. Seja $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ transformação linear definida pela matriz

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Determinar uma matriz M que diagonaliza A ortogonalmente (colunas de M são ortonormais)

b) calcular $M^{-1}AM$

c) Encontrar uma base ortonormal do $\mathbb{R}^3$ formado por autovetores de T

3.- Determinar a equação reduzida e qual a cônica representada por cada uma das equações abaixo

a) $2x^2 + 2y^2 + 4xy + 4\sqrt{2}x + 12\sqrt{2}y - 8 = 0$

b) $x^2 - 4y^2 + 6x + 16y - 23 = 0$

c) $5x^2 - 6xy + 5y^2 - 24\sqrt{2}x + 8\sqrt{2}y + 56 = 0$

d) $2x^2 + 2xy + 2y^2 = 9$

Gabarito

1. O polinômio característico é $p(\lambda)=(\lambda+2)^2(\lambda-4)$ de modo que os autovalores são: $\lambda_1=-2$, $\lambda_2=-2$ e $\lambda_3=4$. Então -2 é um autovalor com multiplicidade 2. A seguir, para encontrar os autovetores associados a λ_1 e λ_2, resolve-se o sistema linear $(-2I_3-A)x=0$, uma base para o espaço solução deste sistema linear é $v_1=(-1,1,0)$ e $v_2=(-1,0,1)$, que não são ortogonais, podemos usar o processo de Gram-Schmidt para obter uma base ortonormal para o espaço solução de $(-2I_3-A)x=0$ (o autoespaço de $\lambda_1=-2$). De modo que obtemos $u_1=\left(1/\sqrt{2}\right)(-1,1,0)$ e $u_2=\left(1/\sqrt{6}\right)(-1,-1,2)$. O conjunto $\{u_1,u_2\}$ é uma base ortonormal para o espaço solução de $(-2I_3-A)x=0$. Além disso tem–se que $v_3=(1,1,1)$ é um autovetor associado a $\lambda_3=4$, normalizando este vetor obtemos $u_3=\left(1/\sqrt{3}\right)(1,1,1)$. Como autovalores associados a autovetores distintos são ortogonais temos que u_3 é ortogonal a u_1 e u_2. Logo $\{u_1,u_2,u_3\}$ é uma base ortonormal para $\Re^3$. A matriz P cuja j-ésima coluna é u_j é

$P=\begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$ e é tal que $P^{-1}=P^T$ (P é ortogonal). Além disso **$P^{-1}.A.P$=** $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}=[T]_\beta$ **.**

2) a) $M=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

B) observe que $M^{-1}=M^t$, $D=M^tAM$ onde

$D=\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

c) $B=\{(1,0,0),(0,-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2}),(0,1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})\}$ é uma base ortonormal do $\mathbb{R}^3$

3.

a) $\hat{x}=\frac{1}{2}\hat{y}^2$ PARÁBOLA

b) $\frac{\hat{x}^2}{16}-\frac{\hat{y}^2}{4}=1$ HIPÉRBOLE

c) $\frac{\hat{x}^2}{4}+\frac{\hat{y}^2}{1}=1$ ELIPSE

d) $\frac{\tilde{x}^2}{3}+\frac{\tilde{y}^2}{9}=1$ ELIPSE