Universidade Federal Fluminense/ Departamento de Análise

GAN 00007 –Introdução à Álgebra Linear – Turma A1/ Professora Ana Maria Luz F. Amaral

Gabarito Lista de Exercícios 9– Matizes semelhantes, Autovalores e Autovetores

1 a)

Characteristic polynomial:	Eigenvalues:	Eigenvectors:
$\lambda^2 - 2\lambda - 3$	$\lambda_1 = 3$	$v_1 = (1, 1)$
	$\lambda_2 = -1$	$v_2 = (-1, 1)$

b)

Characteristic polynomial:	Eigenvalues:	Eigenvectors:
$\lambda^2 - 5\lambda - 6$	$\lambda_1 = 6$	$v_1 = (3, 4)$
	$\lambda_2 = -1$	$v_2 = (-1, 1)$

c)

Characteristic polynomial:	Eigenvalues:	Eigenvectors:
$\lambda^2 - 4$	$\lambda_1 = -2$	$v_1 = (-1, 5)$
	$\lambda_2 = 2$	$v_2 = (-1, 1)$

3. autovalores e correspondentes autovetores

$\lambda_1 = 5$	$v_1 = \left(\frac{8}{100 + 3\sqrt{7}}, -\frac{-300 - \sqrt{7}}{100 + 3\sqrt{7}}, 1\right)$
$\lambda_2 = 3$	$v_2 = (0, 1, 1)$
$\lambda_3 = 1$	$v_3 = (0, -1, 1)$

4. a) O operador não possui autovalores nem autovetores (o operador está definido de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ e a solução da equação característica são números complexos)

b) $\lambda_1 = 6$ $\quad \lambda_2 = -1$ $\quad V_{\lambda=6} = \{x(5,2),\ x \in \mathbb{R}^*\}$ então $(5,2)$ é um autovetor associado a $\lambda_1 = 6$,
$V_{\lambda=-1} = \{x(1,-1),\ x \in \mathbb{R}^*\} \Rightarrow (1,-1)$ é autovetor associado a $\lambda_2 = -1$

c) $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -3$ $\therefore$ $(1,-1)$ e $(1,0)$ são os autovetores associados a $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -3$ respectivamente

5 - Classifique as afirmações abaixo como verdadeiras (V) ou Falsas (F), caso sejam falsas reescreva a afirmação de forma a torná-la verdadeira.

a) Caso o espaço vetorial no qual A esteja definido tenha dimensão finita, a **multiplicidade geométrica** (ou apenas **multiplicidade**) de um valor próprio λ de A é o número de vezes que ele é raiz do polinómio característico de A. (**F**) . **O correto é**: a **multiplicidade algébrica** de um valor próprio λ de A é o número de vezes que ele é raiz do polinómio característico de A.

b) Todas as raízes do polinômio característico de uma matriz simétrica são reais. (**V**)

c) Se A e B são matrizes semelhantes então A e B têm os mesmos autovalores com a mesma multiplicidade (mas, em geral, não têm os mesmos autovetores). (**V**)

d) Se A é uma matriz simétrica (A^T=A), então autovetores associados a autovalores distintos são ortogonais. (**V**)

e) Se uma matriz simétrica A tem um autovalor λ_j com multiplicidade algébrica k_j então o espaço solução do sistema linear $(\lambda_j I_n - A)x = 0$ (o autoespaço de λ_j) tem dimensão k_j, isto é, para matrizes simétricas a multiplicidade algébrica é igual a geométrica. (**V**)

6. Solução. (a) T(1,2)=(3,-1), T(0,1)=(1,-1); (x,y) = x(1,2) + (y-2x)(0,1)

T(1,2) = (3,-1) = 3(1,2) + (-7)(0,1)

T(0,1) = (1,-1) = 1(1,2) + (-3)(0,1). Logo, $[T]_B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -7 & -3 \end{bmatrix}$.

b) autovalores: $\lambda_1 = -\sqrt{2}$ autovetores correspondentes: $v_1 = (1-\sqrt{2},\ 1)$

$\lambda_2 = \sqrt{2}$ $\quad v_2 = (1+\sqrt{2},\ 1)$

(c) Como, $[v]_B = \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \end{bmatrix}$, $[T(v)]_B = [T]_B[v]_B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -7 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -14 \end{bmatrix}$.

d)

$$[I]_A^B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left([I]_A^B\right)^{-1} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

e) $$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -7 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}}_{[I]_A^B [T]_B ([I]_A^B)^{-1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{[T]_A}$$