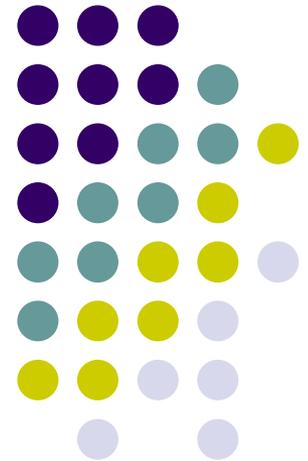


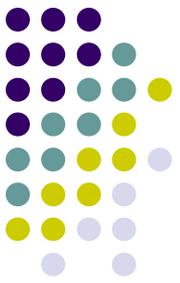
# Álgebra Linear 2019.1

## Aula sobre Diagonalização

Profa. Ana Maria Luz F. Amaral



# Diagonalização de operadores



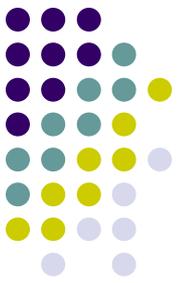
Seja  $T: V \rightarrow V$  um operador linear. Dizemos que  $T$  é um operador diagonalizável se existe uma base  $\beta$  de  $V$  cujos elementos são autovetores de  $T$ .

A matriz que representa  $T$  na base  $\beta$  é uma matriz diagonal cujos elementos são os autovalores de  $T$ , ou seja:

$$[T]_{\beta}^{\beta} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Quando existe esta base  $\beta$  há uma relação entre a representação do operador  $T$  nesta base, com a sua representação em qualquer outra base.

# Diagonalização de operadores



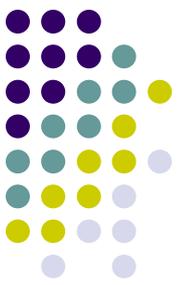
Seja  $M=[T]$  a matriz canônica do operador  $T$  e  $\mathbf{D}$  a matriz de  $T$  na base  $\beta$  de autovetores, dizemos que  $T$  é diagonalizável se existe uma matriz  $\mathbf{P}$  tal que

$$\mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{P}.$$

Onde  $\mathbf{P}$  é a matriz cujas colunas são os autovetores de  $T$  e  $\mathbf{D}=[T]_{\beta}$ .

Assim, a matriz  $\mathbf{D}$  é obtida pela matriz  $\mathbf{P}$ , quando ela existe, sobre a matriz  $\mathbf{M}$ . Dizemos então que a matriz  $\mathbf{P}$  diagonaliza  $\mathbf{M}$  ou que  $\mathbf{P}$  é a matriz diagonalizadora ( $\mathbf{P}$  a matriz de mudança da base de  $\beta$  para a base canônica).

**Quando sabemos que é possível encontrar a matriz  $\mathbf{P}$  e obter  $\mathbf{D}$ ?**



# Diagonalização de operadores

**Teorema:** Se  $M=[T]$  possui todas as raízes de seu polinômio característico reais e distintas então  $M$  é diagonalizável.

**Obs:** raízes do polinômio característico reais e distintas



autovetores associados a autovalores distintos são L.I



existe uma base de autovetores para  $V$

**Teorema:**  $M=[T]$  ( $n$  por  $n$ ) é diagonalizável se, e somente se tem  $n$  autovetores linearmente independentes.

4ª Questão.[2 pts] Seja  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  a transformação linear definida por

$$T(x, y) = (5x + 4y, x + 2y),$$

- (a) Determine  $[T]$  (matriz de  $T$  em relação a base canônica).
- (b) Verifique se  $T$  é diagonalizável (ou seja, se  $A = [T]$  é diagonalizável). Caso afirmativo determine uma matriz  $P$  que diagonaliza  $A = [T]$ , obtenha  $P^{-1}$  e calcule  $P^{-1}.A.P$ .

# Diagonalização de operadores



Temos o seguintes resultados para matrizes simétricas:

**Teorema:** Todas as raízes do polinômio característico de uma matriz simétrica são reais.

**Corolário:** Se  $M$  é uma matriz simétrica com todos os os seus autovalores distintos então  $M$  é diagonalizável.

**Teorema:** Se  $M$  é uma matriz simétrica, então os autovetores associados a autovalores distintos são ortogonais.

**Teorema:** Se  $M$  é uma matriz simétrica de ordem  $n$  então existe uma matriz ortogonal  $P$  tal que  $P^{-1}MP=D$ ,  $D$  uma matriz diagonal. Os autovalores de  $M$  são elementos da diagonal  $D$ .

(Lembrete: Matriz ortogonal  $P^{-1}=P^T$ ).

Exemplos: (Quadro)