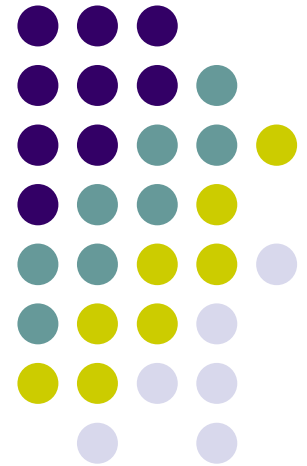


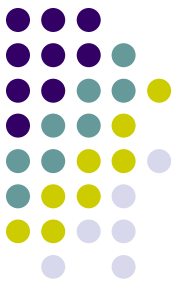
Álgebra Linear 2019.1

Aula sobre Diagonalização

Profa. Ana Maria Luz F. Amaral



Diagonalização de operadores



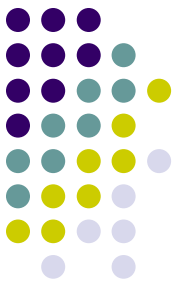
Seja $T: V \rightarrow V$ um operador linear. Dizemos que T é um operador diagonalizável se existe uma base β de V cujos elementos são autovetores de T .

A matriz que representa T na base β é uma matriz diagonal cujos elementos são os autovalores de T , ou seja:

$$[T]_{\beta}^{\beta} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Quando existe esta base β há uma relação entre a representação do operador T nesta base, com a sua representação em qualquer outra base.

Diagonalização de operadores



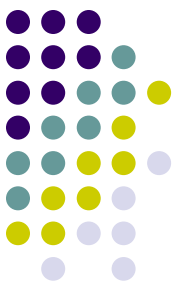
Seja $M=[T]$ a matriz canônica do operador T e \mathbf{D} a matriz de T na base β de autovetores, dizemos que T é diagonalizável se existe uma matriz \mathbf{P} tal que

$$\mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{P}.$$

Onde \mathbf{P} é a matriz cujas colunas são os autovetores de T e $\mathbf{D}=[T]_{\beta}$.

Assim, a matriz \mathbf{D} é obtida pela matriz \mathbf{P} , quando ela existe, sobre a matriz \mathbf{M} . Dizemos então que a matriz \mathbf{P} diagonaliza \mathbf{M} ou que \mathbf{P} é a matriz diagonalizadora (\mathbf{P} a matriz de mudança da base de β para a base canônica).

Quando sabemos que é possível encontrar a matriz \mathbf{P} e obter \mathbf{D} ?



Diagonalização de operadores

Teorema: Se $M=[T]$ possui todas as raízes de seu polinômio característico reais e distintas então M é diagonalizável.

Obs: raízes do polinômio característico reais e distintas



autovetores associados a autovalores distintos são L.I



existe uma base de autovetores para V

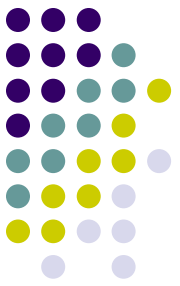
Teorema: $M=[T]$ (n por n) é diagonalizável se, e somente se tem n autovetores linearmente independentes.

4ª Questão.[2 pts] Seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por

$$T(x, y) = (5x + 4y, x + 2y),$$

- (a) Determine $[T]$ (matriz de T em relação a base canônica).
- (b) Verifique se T é diagonalizável (ou seja, se $A = [T]$ é diagonalizável). Caso afirmativo determine uma matriz P que diagonaliza $A = [T]$, obtenha P^{-1} e calcule $P^{-1}.A.P$.

Diagonalização de operadores



Temos o seguintes resultados para matrizes simétricas:

Teorema: Todas as raízes do polinômio característico de uma matriz simétrica são reais.

Corolário: Se M é uma matriz simétrica com todos os os seus autovalores distintos então M é diagonalizável.

Teorema: Se M é uma matriz simétrica, então os autovetores associados a autovalores distintos são ortogonais.

Teorema: Se M é uma matriz simétrica de ordem n então existe uma matriz ortogonal P tal que $P^{-1}MP=D$, D uma matriz diagonal. Os autovalores de M são elementos da diagonal D .

(Lembrete: Matriz ortogonal $P^{-1}=P^T$).

Exemplos: (Quadro)