GAN 00144 Complementos de Matemática Aplicada – E1 – 2019.2

Aula 5

Profa. Ana Maria Luz Fassarella do Amaral

• Noção intuitiva de Limites/Limites Laterais

Recapitulando...

GAN00144 - Complementos de Matemática Aplicada - E1 - 2019.2

Complete o texto abaixo sobre Noção intuitiva de Limites:

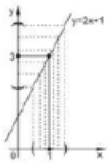
LIMITES

1) Noção intuitiva de limites

Seja a função $f(x) = 2x+1$. Vamos dar valores de x que se aproximem de 1, pela sua direita (valores maiores que 1) e pela esquerda (valores menores que 1) e calcular o valor correspondente de y:

x	$y = 2x+1$
1,5	
1,3	
1,1	
1,05	
1,02	
1,01	

x	$y = 2x+1$
0,5	
0,7	
0,9	
0,95	
0,98	
0,99	



Notemos que à medida que x se aproxima de 1, y se aproxima de , ou seja, quando x tende a 1 ($x \to 1$), y tende para ($y \to$), ou seja:

$$\lim_{x \to 1}(2x+1) =$$

Observamos que quando x tende para 1, y tende para e o limite da função é

Esse é o estudo do comportamento de $f(x)$ quando x tende para 1 ($x \to 1$). Nem é preciso que x assuma o valor 1. Se $f(x)$ tende para ($f(x) \to$), dizemos que o limite de $f(x)$ quando $x \to 1$ é , embora possam ocorrer casos em que para $x = 1$ o valor de $f(x)$ não seja .

De forma geral, escrevemos:

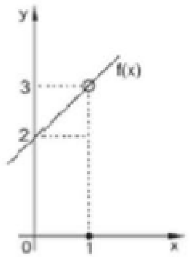
$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

se, quando x se aproxima de a ($x \to a$), $f(x)$ se aproxima de b ($f(x) \to b$)

Seja, agora a função $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+x-2}{x-1}, x \neq 1 \\ 2, se\ x = 1 \end{cases}$

Como $x^2+x-2 = (x-1)(x+2)$, temos:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-1)(x+2)}{x-1}, x \neq 1 \\ 2, se\ x = 1 \end{cases}$$



Calcule o limite de f(x) quando x tende a 1:

Para criar o exercício foi usado o texto disponível em:
http://cursos.unipampa.edu.br/cursos/engenhariaagricola/files/2010/06/Limites.pdf

Recapitulando...

- Noções de Continuidade:

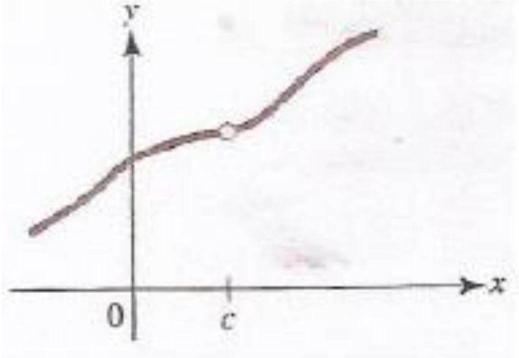
Definição: Uma função f é **contínua em um número c** se:

a) f(c) é definida

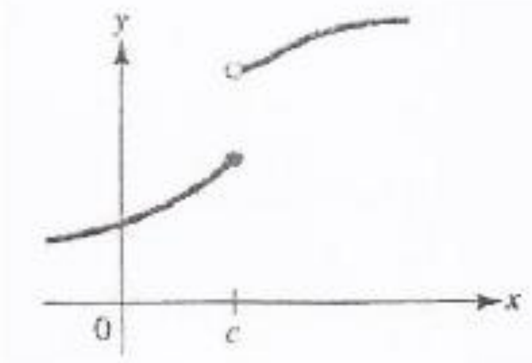
b) $\lim_{x \to c} f(x)$ existe

c) $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

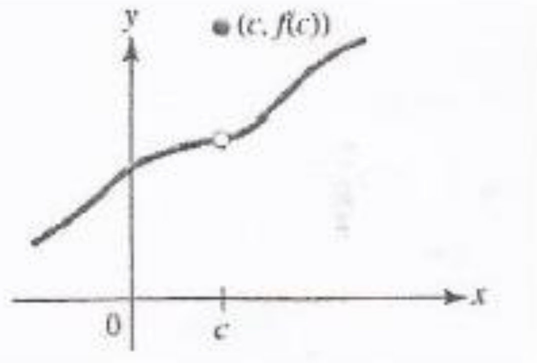
Apresentamos abaixo os gráficos de três funções descontínuas em c.



f(c) não é definida



$\lim_{x \to c} f(x)$ não existe



$\lim_{x \to c} f(x) \neq f(c)$

Propriedades dos limites

- Na matemática, o limite tem o objetivo de determinar o comportamento de uma função y=f(x) à medida que ela se aproxima de alguns valores, sempre relacionando os pontos x e y. Na aula passada e hoje fizemos algumas tabelas para nos ajudar mas vamos ver algumas propriedades (teoremas) que permitam simplificar o cálculo dos limites

Teorema 1: Sejam c e k números reais.

a) $\lim_{x \to c} k = k$ b) $\lim_{x \to c} x = c$

Exemplos:

1) $\lim_{x \to 5} 7 = 7$

2) $\lim_{x \to 4} x = 4$

Teorema 2: Se L, M, c e k são números reais e $\lim_{x \to c} f(x) = L$ e $\lim_{x \to c} g(x) = M$ então:

a) $\lim_{x \to c} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to c} f(x) + \lim_{x \to c} g(x) = L + M$

b) $\lim_{x \to c} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \to c} f(x) - \lim_{x \to c} g(x) = L - M$

c) $\lim_{x \to c} (f(x).g(x)) = \lim_{x \to c} f(x) . \lim_{x \to c} g(x) = L.M$

d) $\lim_{x \to c} (k.f(x)) = k. \lim_{x \to c} f(x) = K.L$

e) $\lim_{x \to c} (f(x))^n = \left(\lim_{x \to c} f(x) \right)^n = L^n$ onde $n \in Z_+^*$

f) Se $M \neq 0$ então $\lim_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to c} f(x)}{\lim_{x \to c} g(x)} = \dfrac{L}{M}$

g) $\lim_{x \to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to c} f(x)} = \sqrt[n]{L}$, desde que $L > 0$ se n for par.

Exemplos:

1) $\lim_{x \to 2} (x^3 + 2x + 5)$

2) $\lim_{x \to 0} \frac{x - 2}{x + 8}$

Teorema 3: a) Seja p(x) uma função polinomial. Então $\lim_{x \to c} p(x) = p(c)$

b) Seja $r(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ uma função racional. Se $q(c) \neq 0$ então $\lim_{x \to c} r(x) = r(c)$

- Uma função polinomial é contínua em todos os números reais
- Uma função racional é contínua em todos os números nos quais está definida

Exemplos:

1) $\lim\limits_{x \to 2} (x^5 - 3x^2 + 5x + 7)$

2) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{3x}{x+4}$

Teorema 4: Se $\lim\limits_{x \to c} h(x) = L$ e f é uma função tal que f(x) = h(x) para todos os valores de x pertencentes a algum intervalo ao redor de c, excluindo o valor x = c, então $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$.

Exemplo 1: Calcular $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$

Exemplo 2: Calcular $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1 - x}{1 - \sqrt{x}}$

Limites que envolvem

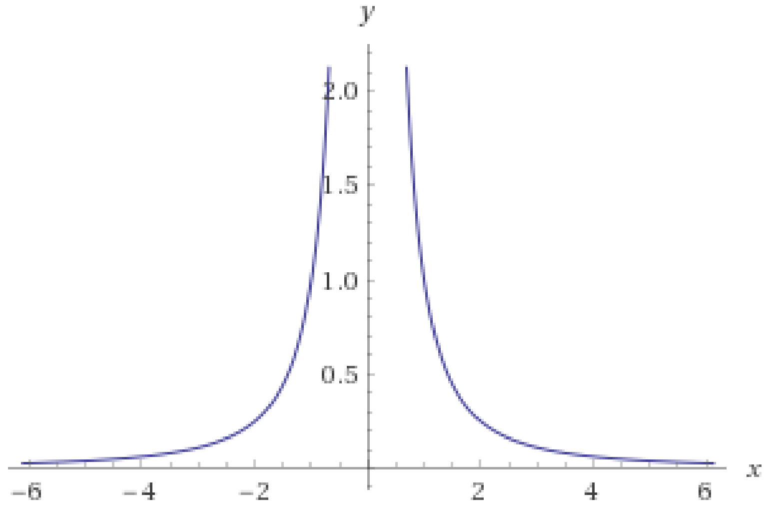
$$\infty$$

(infinito)

Exemplos:

Vamos analisar, por exemplo, o comportamento da função $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ quando x se aproxima de zero

x	– 0,1	– 0,01	– 0,001	0	0,001	0,01	0,1
f(x)				–			

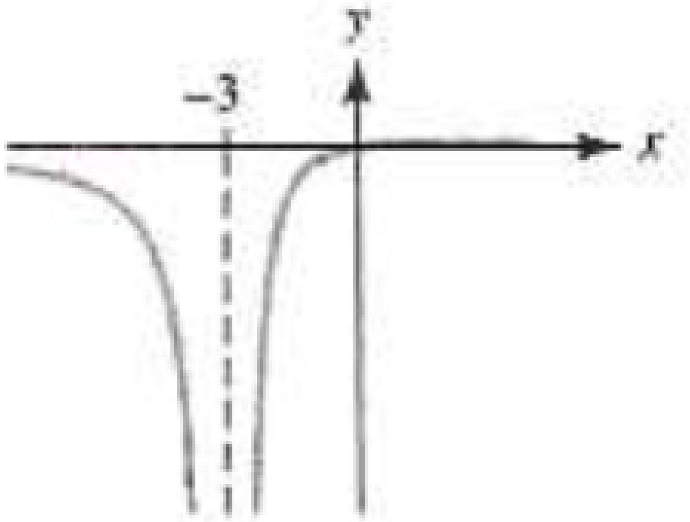


(x

Exemplos:

Vamos analisar a função $g(x) = \dfrac{x}{(x+3)^2}$ para valores de x próximos de – 3

x	– 3,1	– 3,01	– 3,001	– 3	– 2,999	– 2,99	– 2,9
g(x)				–			



Exemplos:

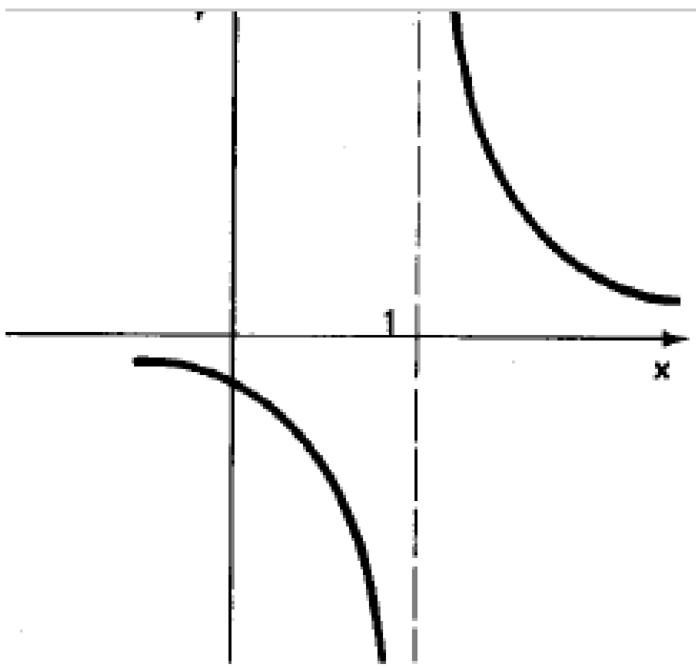
Consideremos agora a função h definida por $h(x) = \dfrac{1}{x - 1}$ para todo x real e $x \neq 1$.

Atribuindo a x valores próximos de 1, porém menores que 1, temos:

x	0	0,5	0,75	0,9	0,99	0,999
f(x)						

e atribuindo a x valores próximos de 1, porém maiores que 1, temos:

x	2	1,5	1,25	1,1	1,01	1,001
f(x)						



Observação: Os símbolos ∞ e $-\infty$ não representam um número real. São apenas notações para indicar que f(x) aumenta ou diminui ilimitadamente quando x se aproxima de um número real. Assim, quando escrevemos, por exemplo, que $\lim_{x \to c} f(x) = \infty$, não estamos dizendo que f(x) está cada vez mais próximo de um número real, ou que o limite existe.