GAN 00144
Complementos de Matemática Aplicada – E1 – 2019.2

Aula 5

Profa. Ana Maria Luz Fassarella do Amaral

Limites que envolvem

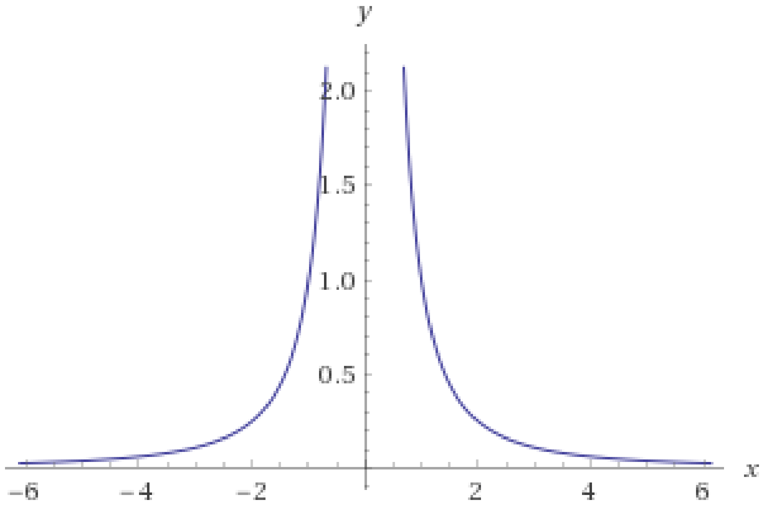
∞

(infinito)

Exemplos:

Vamos analisar, por exemplo, o comportamento da função $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ quando x se aproxima de zero

x	– 0,1	– 0,01	– 0,001	0	0,001	0,01	0,1
f(x)				–			

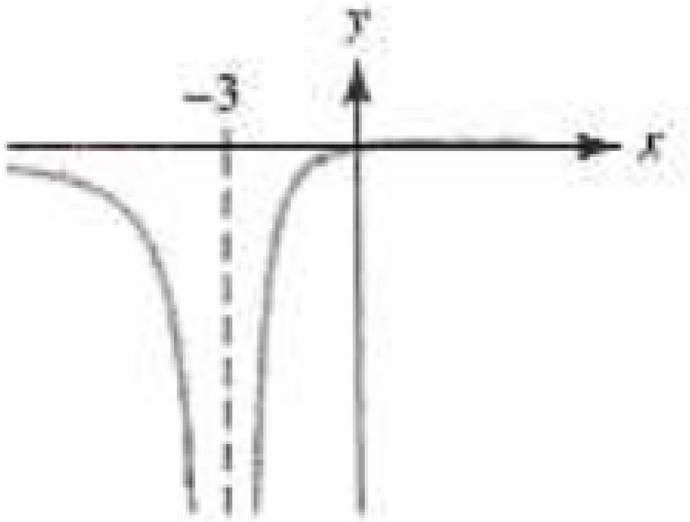


(x

Exemplos:

Vamos analisar a função $g(x) = \dfrac{x}{(x+3)^2}$ para valores de x próximos de – 3

x	– 3,1	– 3,01	– 3,001	– 3	– 2,999	– 2,99	– 2,9
g(x)				–			



Exemplos:

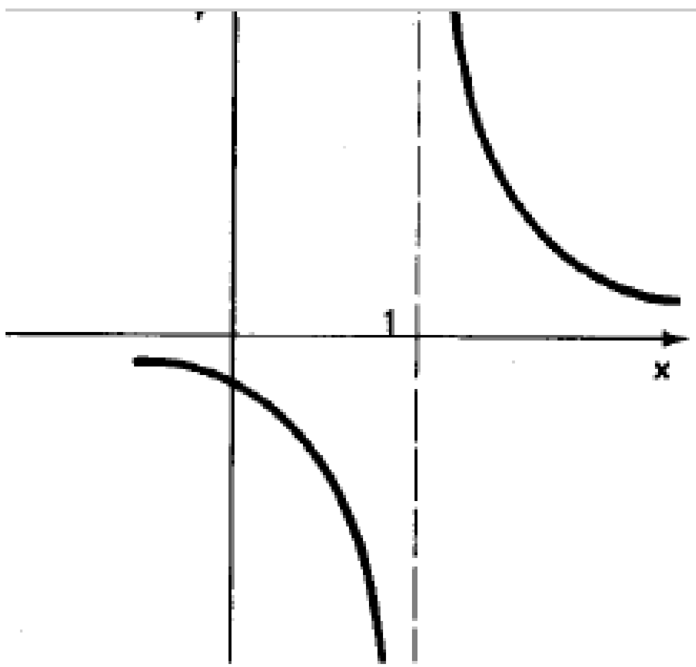
Consideremos agora a função h definida por $h(x) = \frac{1}{x - 1}$ para todo x real e $x \neq 1$.

Atribuindo a x valores próximos de 1, porém menores que 1, temos:

x	0	0,5	0,75	0,9	0,99	0,999
f(x)						

e atribuindo a x valores próximos de 1, porém maiores que 1, temos:

x	2	1,5	1,25	1,1	1,01	1,001
$f(x)$						



Observação: Os símbolos ∞ e $-\infty$ não representam um número real. São apenas notações para indicar que f(x) aumenta ou diminui ilimitadamente quando x se aproxima de um número real. Assim, quando escrevemos, por exemplo, que $\lim_{x \to c} f(x) = \infty$, não estamos dizendo que f(x) está cada vez mais próximo de um número real, ou que o limite existe.

De modo geral temos:

Teorema: Se $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = L$, onde L é um número real diferente de zero, e $\lim\limits_{x \to c^+} g(x) = 0$ então $\lim\limits_{x \to c^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty$, com o sinal dependendo dos sinais de L e de g(x) à direita de c.

Observação: O teorema anterior pode ser enunciado para o limite à esquerda de c com as mesmas conclusões.

Exercícios

1) $\lim\limits_{x \to 5^+} \dfrac{9-x}{x-5}$

2) $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{-3x}{x-2}$

3) $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x^2+1}{x^2+x}$

4) $\lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{1-x}{x+2}$

5) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{5}{x^3-x^2}$

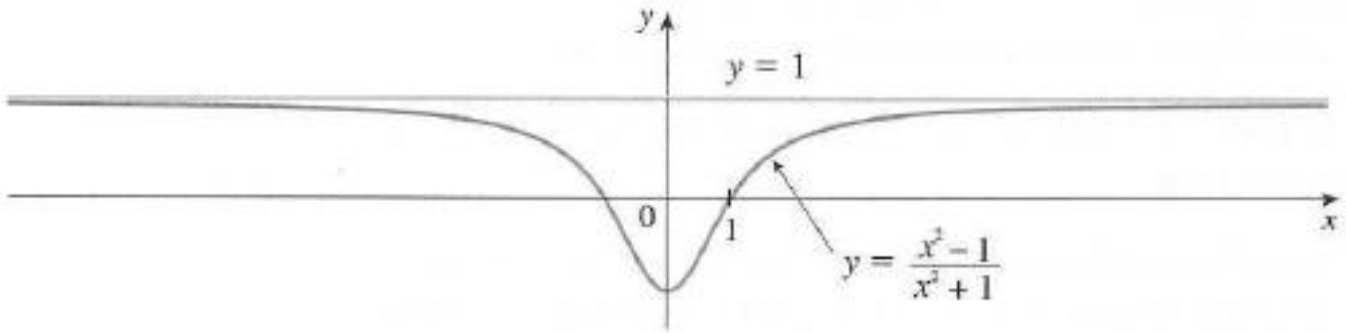
6) $\lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{x-2}{x+1}$

Limites no infinito

Vamos começar pela análise do comportamento da função f definida por

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

x	$f(x)$
0	−1
±1	0
±2	0,600000
±3	0,800000
±4	0,882353
±5	0,923077
±10	0,980198
±50	0,999200
±100	0,999800
±1 000	0,999998



Em geral, usamos a notação $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ para indicar que os valores de f(x) tendem para o número L quando x aumenta ilimitadamente. Analogamente, escrevemos $\lim_{x\to-\infty} f(x) = M$ para indicar que os valores de f(x) tendem para o número M quando x diminui ilimitadamente.

Teorema: Se n é um número inteiro positivo e c é um número real então

$$\lim_{x\to\infty} \frac{c}{x^n} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{c}{x^n} = 0$$

Exemplos: 1) $\lim_{x\to\infty} \frac{12}{x^7} = 0$ 2) $\lim_{x\to-\infty} \frac{7}{x^4} = 0$

O limite no infinito de uma função polinomial é igual ao limite de seu termo de maior expoente (pois se colocarmos esse termo em evidência, todos os demais tendem a zero). Por exemplo:

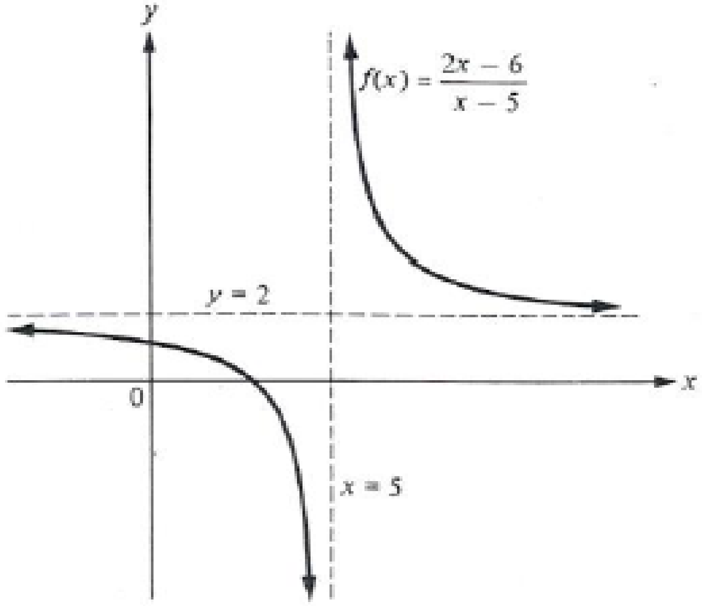
$$\lim_{x \to \infty} (2x^5 - 4x^2 + 3x + 7) = \lim_{x \to \infty} 2x^5 \left(1 - \frac{2}{x^3} + \frac{3}{2x^4} + \frac{7}{2x^5} \right) = \lim_{x \to \infty} 2x^5 = \infty$$

Como consequência, quando tivermos o limite no infinito de um quociente de dois polinômios, ele será igual ao limite do quociente dos termos de maior expoente do numerador e do denominador. Assim, por exemplo:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{6x^7 + 5x^4 - 3x + 7}{2x^3 - 6x + 9} = \lim_{x \to -\infty} \frac{6x^7}{2x^3} = \lim_{x \to -\infty} 3x^4 = \infty$$

Assíntotas horizontais e assíntotas verticais

Os limites que envolvem infinito podem ser usados para descrever retas conhecidas como **assíntotas**, que estão frequentemente associadas a gráficos de funções racionais.



Vamos considerar, por exemplo, o gráfico da função f esboçado ao lado.

O gráfico se aproxima da reta horizontal y = 2 quando x aumenta ou diminui ilimitadamente. Essa reta é chamada de **assíntota horizontal**. As assíntotas horizontais do gráfico de uma função f podem ser determinadas calculando:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) \text{ e } \lim_{x \to \infty} f(x)$$

Se algum desses limites existe (é um número real), então o valor do limite determina a assíntota horizontal.

O gráfico de uma função também pode se aproximar de uma reta vertical quando x se aproxima de um determinado número, como no gráfico acima. A reta x = 5 é chamada de **assíntota vertical** do gráfico de f.

Assíntotas horizontais e assíntotas verticais

Definição: Seja f uma função real.

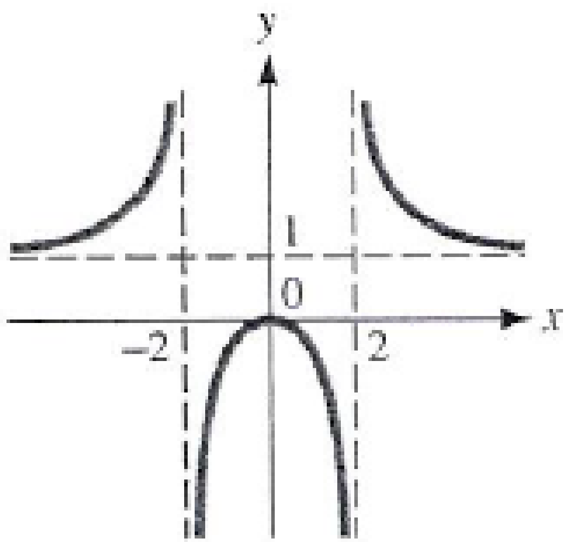
Se f tende para infinito (ou menos infinito) quando x tende para um número a pela direita ou pela esquerda, a reta x = a é uma **assíntota vertical** do gráfico de f.

Se $\lim_{x\to\infty} f(x) = b_1$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = b_2$ onde b_1 e b_2 são números reais, as retas $y = b_1$ e $y = b_2$ são **assíntotas horizontais** do gráfico de f.

Observações: 1 – Para localizar as possíveis assíntotas verticais do gráfico de uma função racional f tal que $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ devemos procurar valores de x tais que $q(x) = 0$ e $p(x) \neq 0$. Para achar as assíntotas horizontais devemos calcular os limites de f quando x tende para ∞ e quando x tende para $-\infty$. Se algum desses limites existe (é finito), então o valor do limite determina a equação da assíntota horizontal.

2 – As funções polinomiais não possuem assíntotas horizontais nem assíntotas verticais.

Exemplos: 1) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$



Solução: $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x^2}{x^2 - 4} = \infty$ e $\lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{x^2}{x^2 - 4} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{x^2 - 4} = 1$ e $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2}{x^2 - 4} = 1$

Então x = 2 e x = – 2 são assíntotas verticais e y = 1 é assíntota horizontal

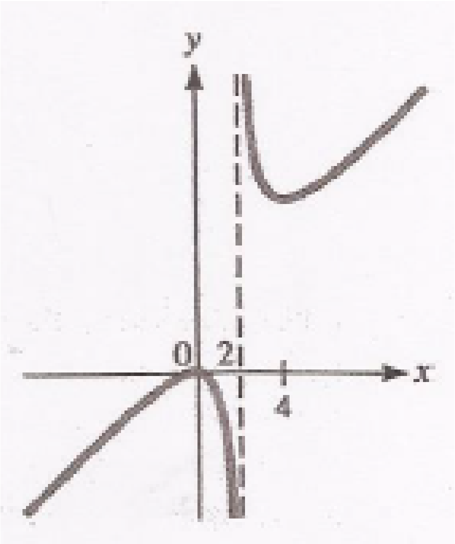
Exemplo só com assíntota vertical!

2) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-2}$

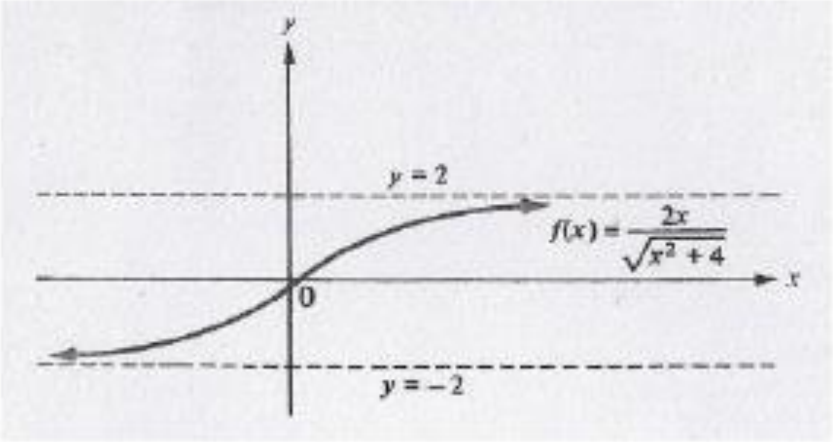
Solução: $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x^2}{x-2} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{x-2} = -\infty$ e $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2}{x-2} = \infty$

Então $x = 2$ é assíntota vertical e não existem assíntotas horizontais



3) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$



Solução: $\sqrt{x^2+1} \neq 0$ para todo número real

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = -1 \text{ e } \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = 1$$

Não existem assíntotas verticais e $y = 1$ e $y = -1$ são assíntotas horizontais

Propriedades dos Limites Infinitos

Dados		Conclusão
$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \to a} g(x) = +\infty$	$\lim_{x \to a} (f+g)(x) = +\infty$
$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$	$\lim_{x \to a} g(x) = -\infty$	$\lim_{x \to a} (f+g)(x) = -\infty$
$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \to a} g(x) = b \neq 0$	$\lim_{x \to a} (f \cdot g)(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } b > 0 \\ -\infty & \text{se } b < 0 \end{cases}$
$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$	$\lim_{x \to a} g(x) = b \neq 0$	$\lim_{x \to a} (f \cdot g)(x) = \begin{cases} -\infty & \text{se } b > 0 \\ +\infty & \text{se } b < 0 \end{cases}$
$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \to a} g(x) = +\infty$	$\lim_{x \to a} (f \cdot g)(x) = +\infty$
$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \to a} g(x) = -\infty$	$\lim_{x \to a} (f \cdot g)(x) = -\infty$
$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$	$\lim_{x \to a} g(x) = -\infty$	$\lim_{x \to a} (f \cdot g)(x) = +\infty$
$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$		$\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = 0$
$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$		$\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = 0$
$\lim_{x \to a} f(x) = 0$		$\lim_{x \to a} \left\lvert \frac{1}{f(x)} \right\rvert = +\infty$

Não poderemos estabelecer uma lei para os seguintes casos:

$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \to a} g(x) = +\infty$	$\lim_{x \to a} (f - g)(x) = ?$
$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$	$\lim_{x \to a} g(x) = -\infty$	$\lim_{x \to a} (f - g)(x) = ?$
$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \to a} g(x) = -\infty$	$\lim_{x \to a} (f + g)(x) = ?$
$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ (ou $-\infty$)	$\lim_{x \to a} g(x) = 0$	$\lim_{x \to a} (f \cdot g)(x) = ?$
$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ (ou $-\infty$)	$\lim_{x \to a} g(x) = -\infty$ (ou $+\infty$)	$\lim_{x \to a} \frac{f}{g}(x) = ?$

Dever de casa: Lista 3,4 e 5

Referências:

- Apostila elaborada pela Profa. Maria Emília Neves Cardoso - Complementos de Matemática Aplicada
- Livro: Fundamentos da Matemática Elementar, 8: limites, derivadas, noções de integral. Gelson Iezzi. Carlos Murakami. Nilson José Machado. 5ª ed – São Paulo: Atual, 1993.
- Stewart, J., Cálculo. Volume I, 5a Edição ou 6a Edição, 2006-9. Editora Thomson