Revisão de Função

Aula 2: Complementos
Matemática Aplicada – E1

2019.2

Sejam A e B conjuntos não vazios.

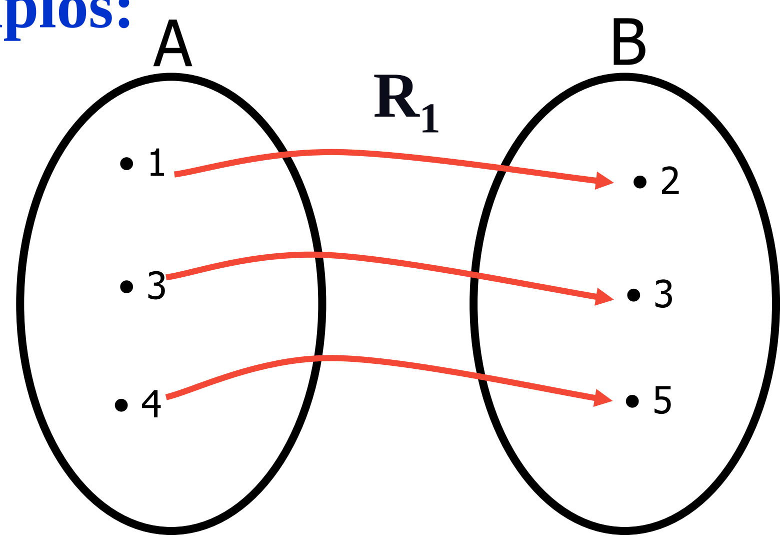
Função é uma relação binária em que cada elemento **x** do conjunto A corresponde a um único elemento **y** do conjunto B.

f: A → B   lê-se: f é função de A em B.

y = f(x) lê-se: y é função de x, com x Î A e y Î B.

Exemplos:

a)



R_1 é uma função de A em B, pois cada elemento do conjunto A corresponde a um único elemento do conjunto B.

REPRESENTAÇÕES DE FUNÇÕES

É possível representar uma função de quatro maneiras:

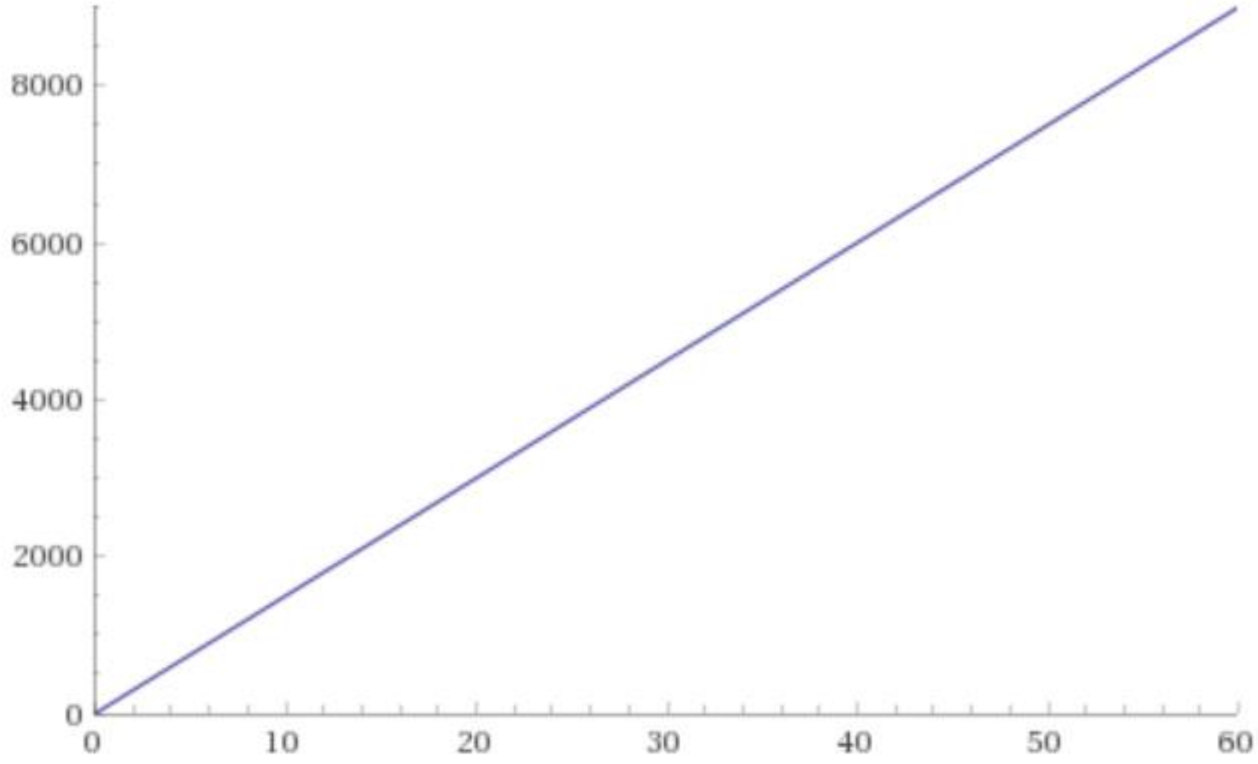
- verbalmente (descrevendo-a com palavras)
- numericamente (por meio de uma tabela de valores)
- visualmente (através de um gráfico)
- algebricamente (utilizando-se uma fórmula explícita)

Exemplo: Numa esteira ergométrica, um atleta treina com uma velocidade constante para uma maratona. Seu treinador observa, a cada 10 minutos, o espaço percorrido e anota em uma tabela seu desempenho. Observe:

Instante (minutos)	Distância (m)
10	1 500
20	3 000
30	4 500
40	6 000
50	7 500
60	9 000

A cada instante (x), em minutos, corresponde a uma única distância (y), em metros. Dizemos então que a distância percorrida pelo atleta encontra-se em função do instante de tempo gasto em seu treinamento. Como a cada 10 minutos são percorridos 1500 metros; a cada minuto, 150 metros são percorridos, assim a fórmula que relaciona espaço e tempo pode ser descrita por **y = 150x**.

Representação Gráfica: gráfico de y=150x



Representação Gráfica

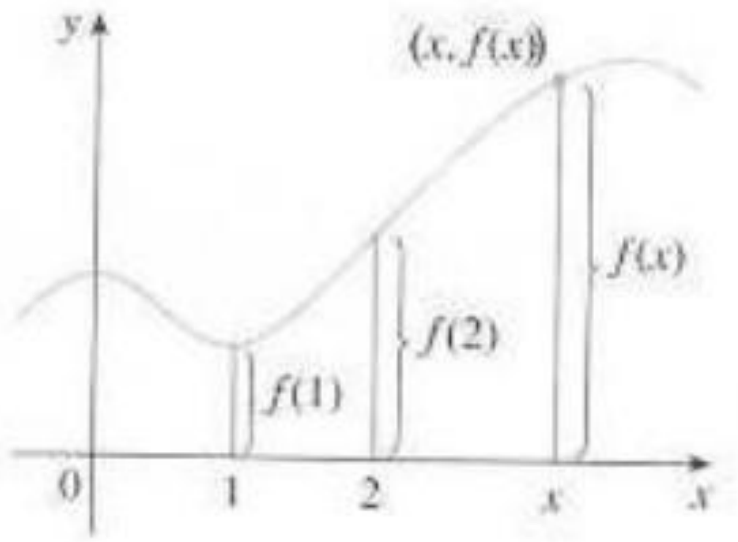


FIGURA 4

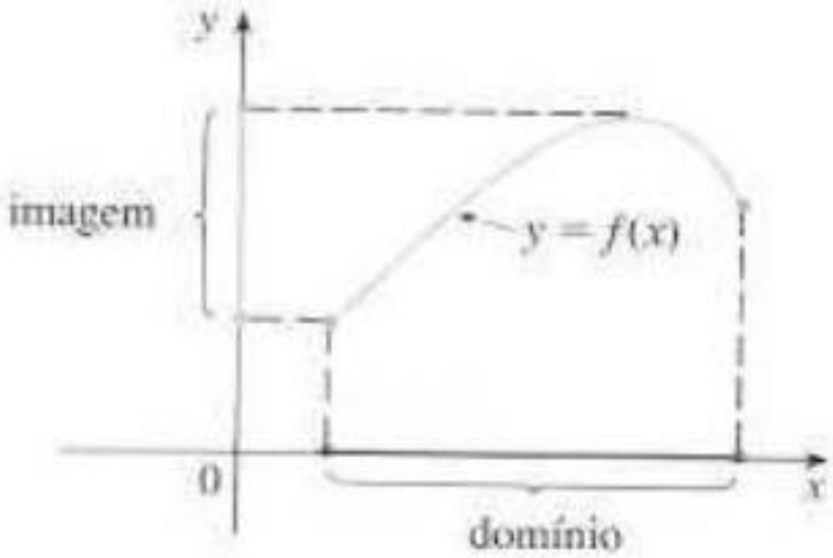
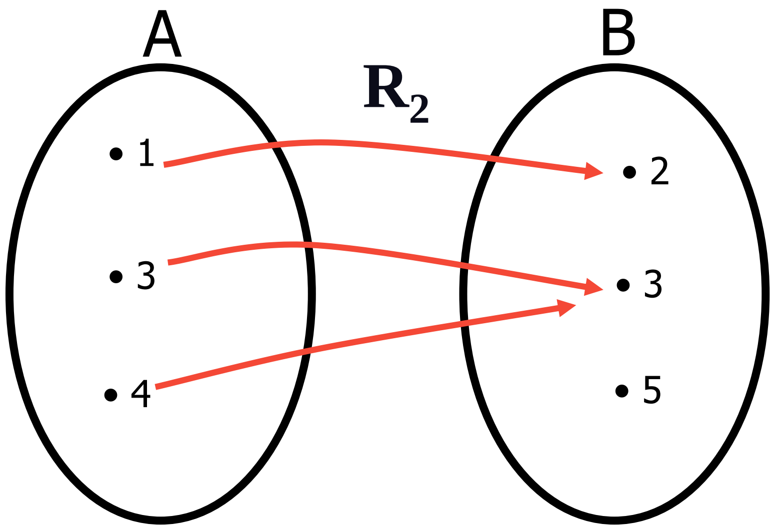
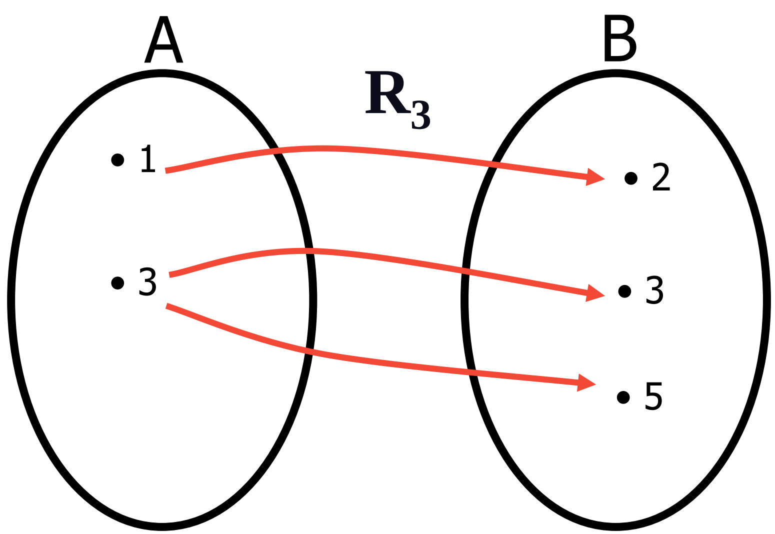


FIGURA 5

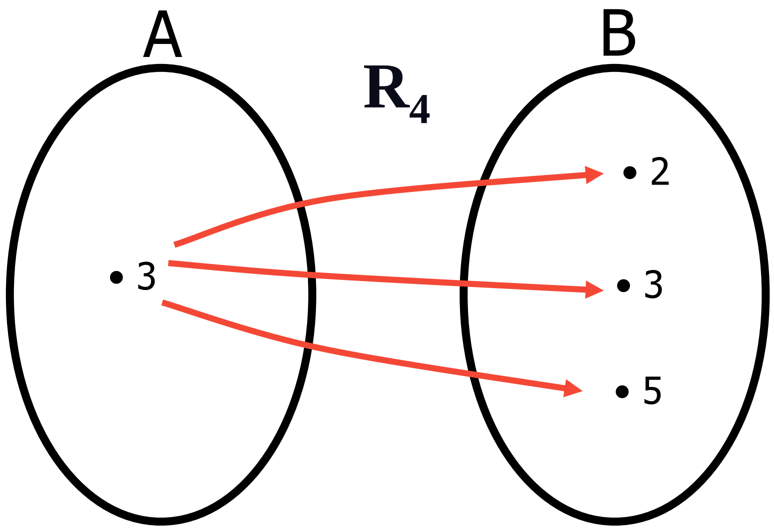
Representação gráfica: Diagrama de flechas

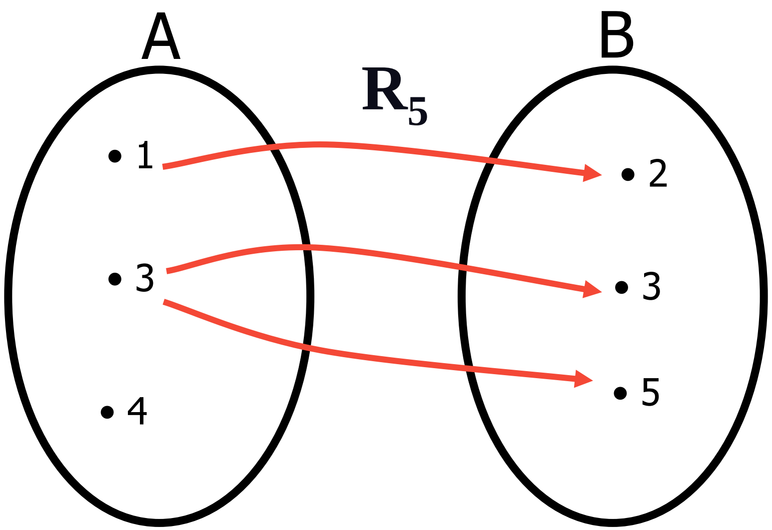


R_2 é uma função de A em B, pois cada elemento do conjunto A corresponde a um único elemento do conjunto B.



R_3 não é uma função de A em B, pois o elemento 3 do conjunto A corresponde a dois elementos do conjunto B.





É ou não é função?

Raiz ou zero de uma função

Dada a função *f* de A em B, chamamos raiz (ou zero) da função todo elemento de A cuja imagem é zero.

a) Na função f:IR→IR dada por $f(x) = x + 2$, temos:

$f:(-2) = -2 + 2 = 0$

(portanto –2 é raiz da função, ou seja, $f(-2) = 0$)

b) Na função f:IR→IR dada por $f(x) = -2x^2 - 3$, temos:

$f:(3) = -2.3^2 - 3 = -2.9 - 3 = -18 - 3 = -21$

(portanto 3 não é raiz da função, pois $f(3) = -21 \neq 0$

Domínio de uma função real

Determinar o domínio de uma função em IR, é determinar o subconjunto de IR, formados por todos os valores de x possíveis, para que as expressões resultem em um número real.

Exemplos:

Determine o domínio, em IR, das funções:

a) $f(x) = \dfrac{3+x}{2x-5}.$

$$2x - 5 \neq 0$$
$$2x \neq 5$$
$$x \neq 5/2$$

D (f) = {x Î R/ $x \neq 5/2$}

b) $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x-6}}{5}.$

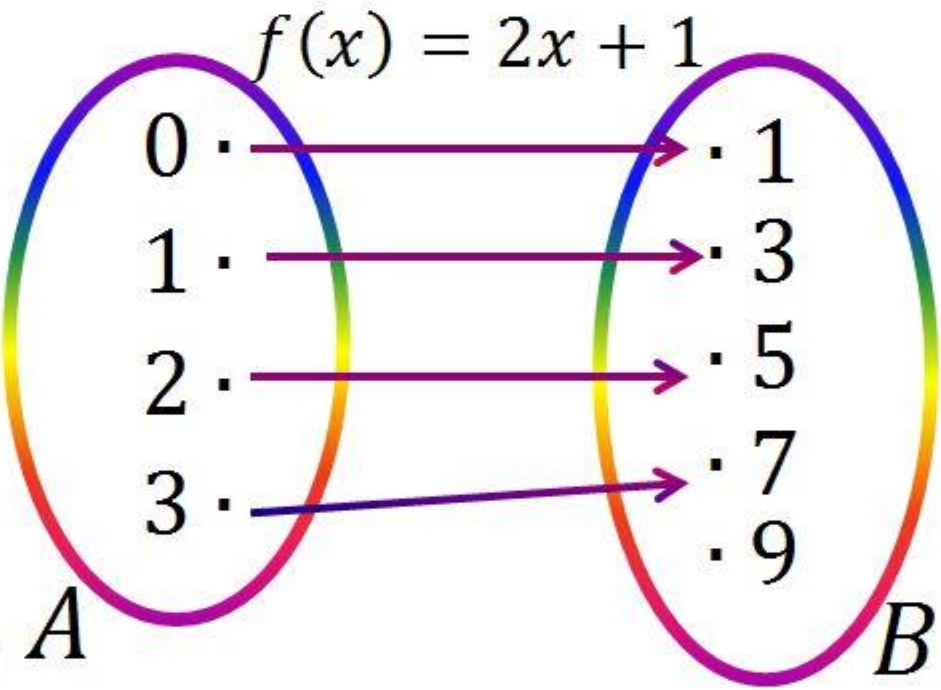
$$2x - 6 \geq 0$$
$$2x \geq 6$$
$$x \geq 3$$

D (f) = {x Î R/ $x \geq 3$}

Função Injetora

$$f: A \to B$$

Para quaisquer valores de $x \in A$, com $x_1 \neq x_2$, temos $f(x_1) \neq f(x_2)$



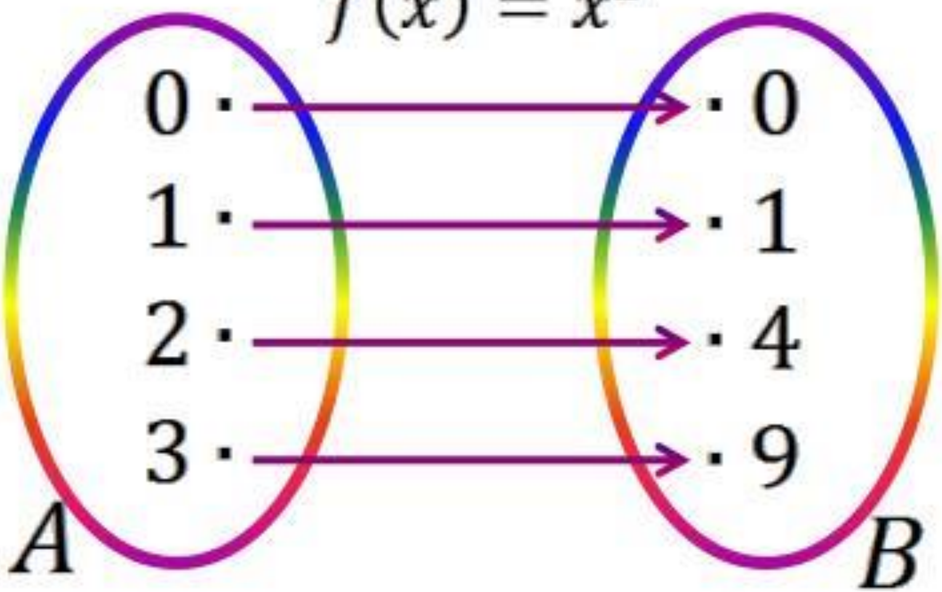
Observe que quaisquer dois elementos do domínio têm como imagem elementos distintos do contradomínio

Função Sobrejetora

$$f: A \to B$$

Para todo $y \in B$, sempre temos $x \in A$, ou seja, o conjunto imagem é igual ao contradomínio.

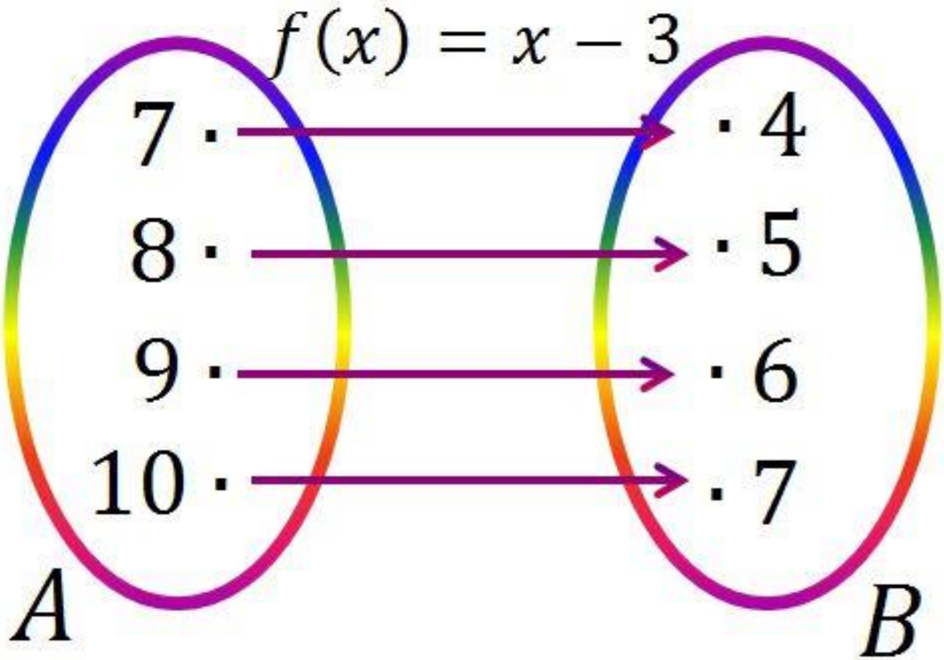
$$f(x) = x^2$$



Função Bijetora

$$f: A \to B$$

A função bijetora se for sobrejetora e injetora.



Observe que o contradomínio é igual ao conjunto imagem, logo é sobrejetora; e que quaisquer dois elementos do domínio têm como imagem elementos distintos do contradomínio, logo é injetora.

POLINÔMIOS

Uma função P é denominada **polinômio** se

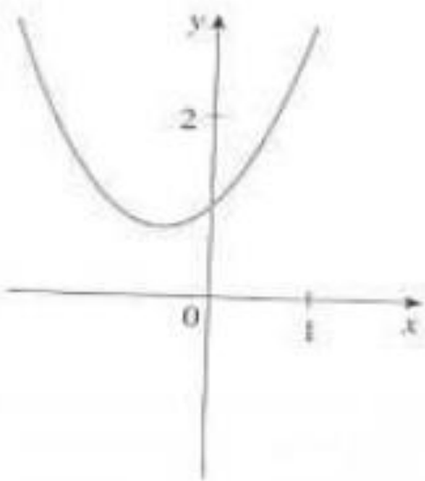
$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

onde n é um inteiro não negativo e os números $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ são constantes chamadas **coeficientes** do polinômio. O domínio de qualquer polinômio é $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$. Se o coeficiente dominante $a_n \neq 0$, então o **grau** do polinômio é n. Por exemplo, a função

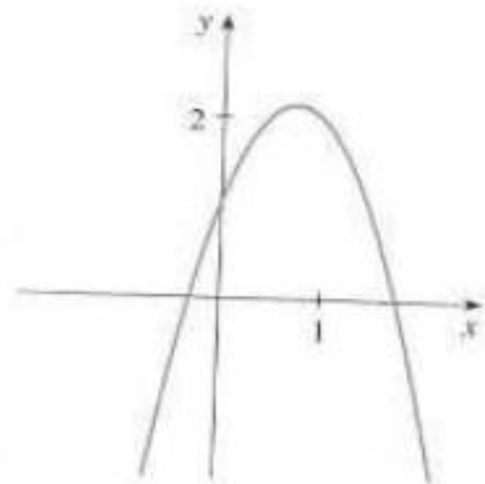
$$P(x) = 2x^6 - x^4 + \tfrac{2}{5}x^3 + \sqrt{2}$$

é um polinômio de grau 6.

Um polinômio de grau 1 é da forma $P(x) = mx + b$ e, portanto, é uma função linear. Um polinômio de grau 2 é da forma $P(x) = ax^2 + bx + c$ e é chamado **função quadrática**. O gráfico de P é sempre uma parábola obtida por translações da parábola $y = ax^2$, conforme veremos na próxima seção. A parábola abre-se para cima se $a > 0$ e para baixo quando $a < 0$. (Veja a Figura 7.)



(a) $y = x^2 + x + 1$

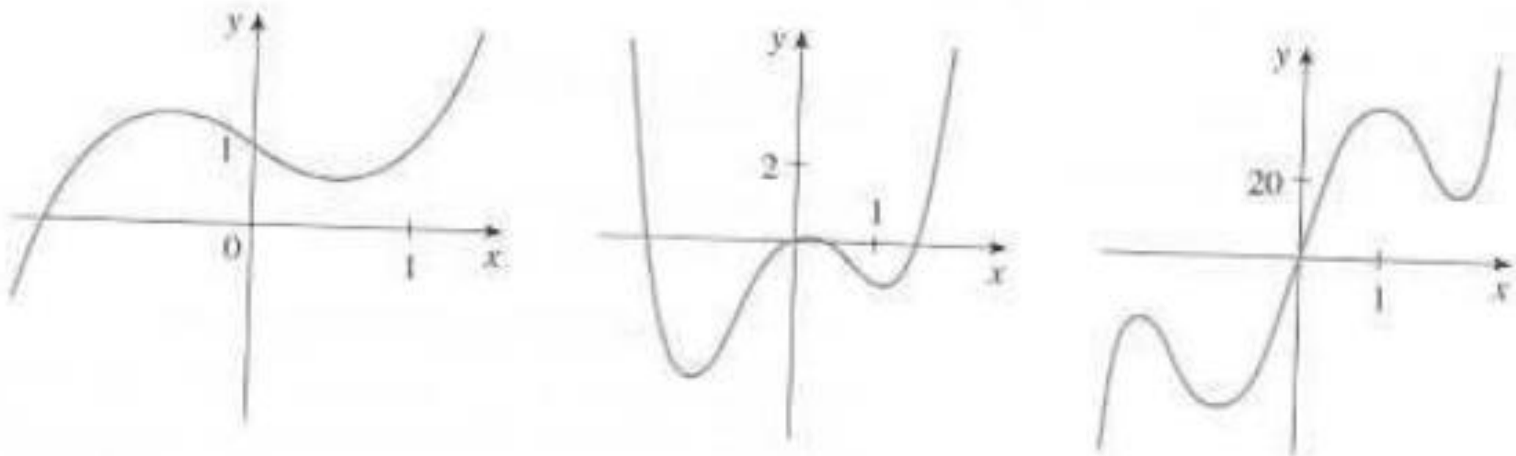


(b) $y = -2x^2 + 3x + 1$

Um polinômio de grau 3 tem a forma

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \qquad (a \neq 0)$$

e é chamado **função cúbica**. A Figura 8 mostra o gráfico de uma função cúbica na parte (a) e os gráficos de polinômios de grau 4 e 5 nas partes (b) e (c). Veremos adiante por que os gráficos têm esses aspectos.



(a) $y = x^3 - x + 1$ (b) $y = x^4 - 3x^2 + x$ (c) $y = 3x^5 - 25x^3 + 60x$

Os polinômios são usados comumente para modelar diversas quantidades que ocorrem em ciências sociais e naturais. Por exemplo, na Seção 3.7 explicaremos por que os economistas frequentemente usam um polinômio $P(x)$ para representar o custo da produção de x unidades de um produto. No exemplo a seguir vamos usar uma função quadrática para modelar a queda de uma bola.

FUNÇÕES POTÊNCIAS

Uma função da forma $f(x) = x^a$, onde a é uma constante, é chamada **função potência**. Vamos considerar vários casos.

(i) $\boldsymbol{a = n}$**, onde** $\boldsymbol{n}$ **é um inteiro positivo**

Os gráficos de $f(x) = x^n$ para $n = 1, 2, 3, 4$ e 5 estão na Figura 11. (Esses são polinômios com um só termo). Já conhecíamos os gráficos de $y = x$ (uma reta passando pela origem, com inclinação 1) e $y = x^2$ [uma parábola – veja o Exemplo 2(b) da Seção 1.1].

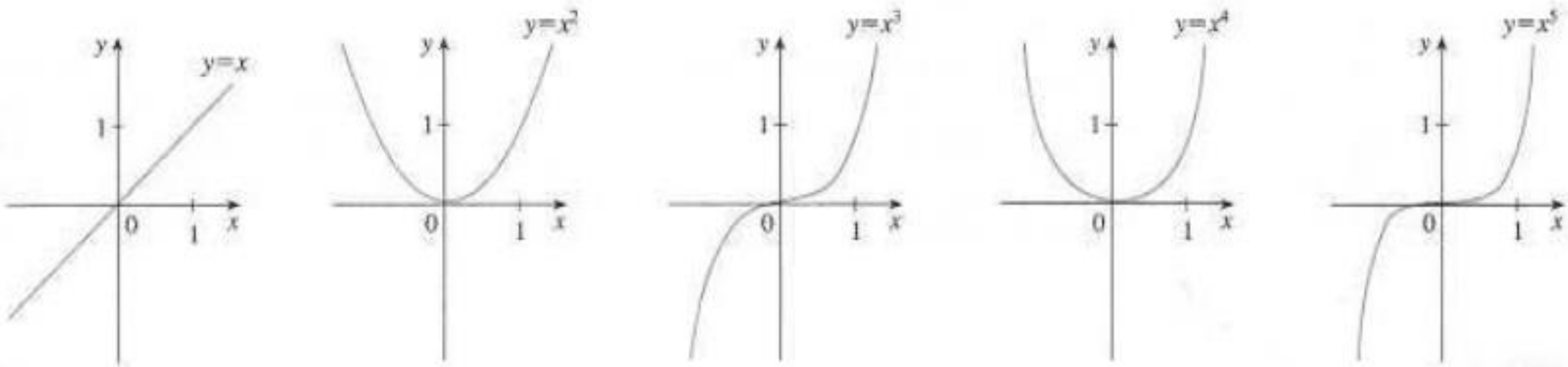
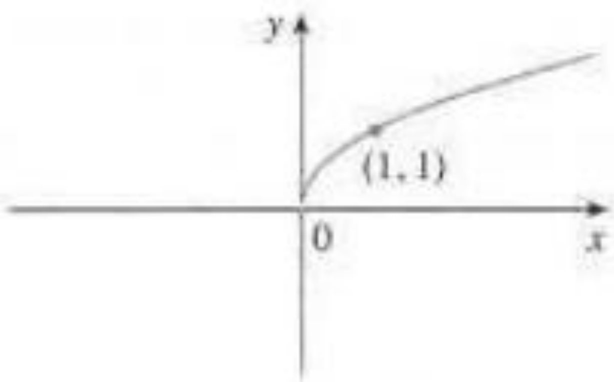


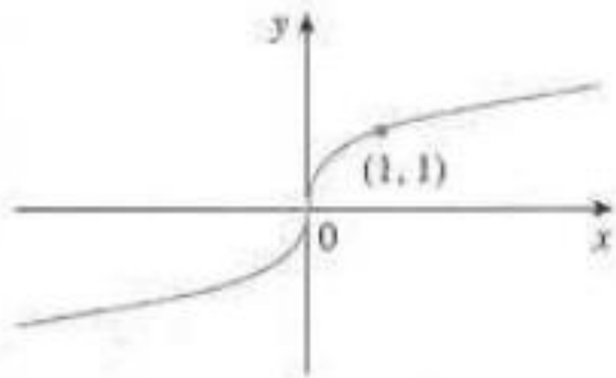
FIGURA 11 Gráficos de $f(x) = x^n$ para $n = 1, 2, 3, 4$ e 5

(ii) $a = 1/n$, onde n é um inteiro positivo

A função $f(x) = x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$ é uma **função raiz**. Para $n = 2$, ela é a função raiz quadrada $f(x) = \sqrt{x}$, cujo domínio é $[0, \infty)$ e cujo gráfico é a parte superior da parábola $x = y^2$ [veja a Figura 13(a)]. Para outros valores pares de n, o gráfico de $y = \sqrt[n]{x}$ é similar ao de $y = \sqrt{x}$. Para $n = 3$, temos a função raiz cúbica $f(x) = \sqrt[3]{x}$ cujo domínio é $\mathbb{R}$ (lembre-se de que todo número real tem uma raiz cúbica) e cujo gráfico está na Figura 13(b). O gráfico de $y = \sqrt[n]{x}$ para n ímpar ($n > 3$) é similar ao de $y = \sqrt[3]{x}$.



(a) $f(x) = \sqrt{x}$



(b) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

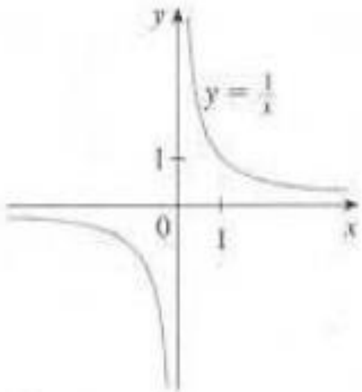


FIGURA 14
A função recíproca

(iii) $a = -1$

O gráfico da **função recíproca** $f(x) = x^{-1} = 1/x$ está na Figura 14. Seu gráfico tem a equação $y = 1/x$, ou $xy = 1$, e é uma hipérbole com os eixos coordenados como suas assíntotas. Esta função aparece em física e química em conexão com a Lei de Boyle, que afirma que, sendo constante a temperatura, o volume de um gás é inversamente proporcional à pressão:

$$V = \frac{C}{P}$$

onde C é uma constante. Assim, o gráfico de V como uma função de P (veja a Figura 15) tem o mesmo aspecto geral da metade à direita da Figura 14.

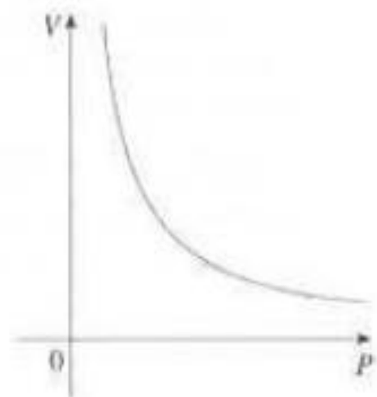


FIGURA 15
Volume como uma função da pressão à temperatura constante

FUNÇÕES RACIONAIS

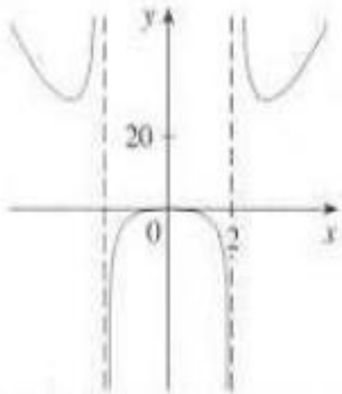


FIGURA 16

$f(x) = \dfrac{2x^4 - x^2 + 1}{x^2 - 4}$

Uma **função racional** f é a razão de dois polinômios:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

em que P e Q são polinômios. O domínio consiste em todos os valores de x tais que $Q(x) \neq 0$. Um simples exemplo de uma função racional é a função $f(x) = 1/x$, cujo domínio é $\{x \mid x \neq 0\}$; esta é a função recíproca cujo gráfico está na Figura 14. A função

$$f(x) = \frac{2x^4 - x^2 + 1}{x^2 - 4}$$

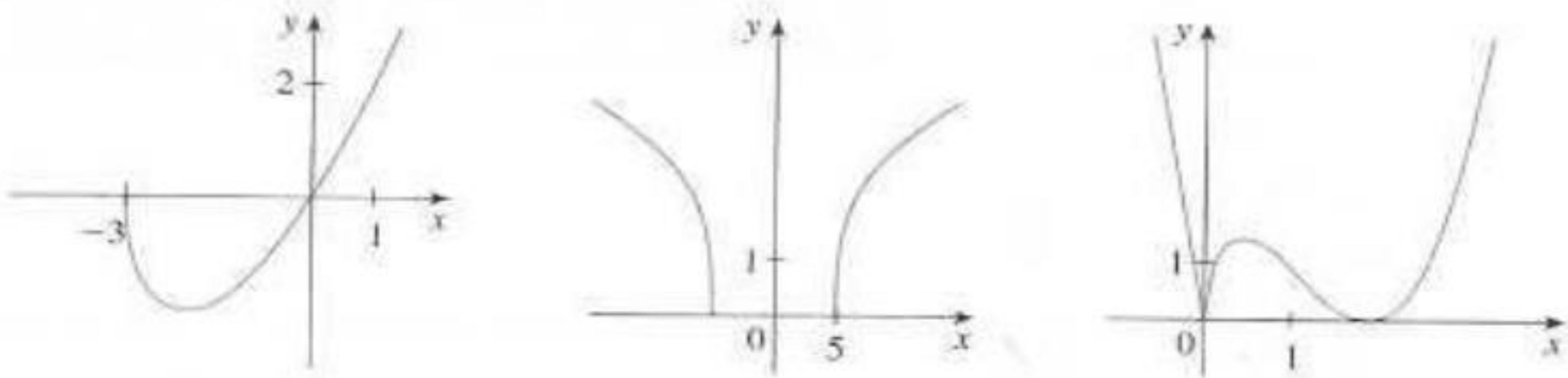
é uma função racional com domínio $\{x \mid x \neq \pm 2\}$. Seu gráfico está na Figura 16.

FUNÇÕES ALGÉBRICAS

Uma função f é chamada **função algébrica** se puder ser construída por meio de operações algébricas (como adição, subtração, multiplicação, divisão e extração de raízes) a partir de polinômios. Toda função racional é automaticamente uma função algébrica. A seguir, alguns exemplos:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} \qquad g(x) = \frac{x^4 - 16x^2}{x + \sqrt{x}} + (x - 2)\sqrt[3]{x + 1}$$

Quando trabalharmos com funções algébricas no Capítulo 4, veremos que seus gráficos podem assumir diversas formas. A Figura 17 ilustra algumas dessas possibilidades.



(a) $f(x) = x\sqrt{x + 3}$ (b) $g(x) = \sqrt[4]{x^2 - 25}$ (c) $h(x) = x^{2/3}(x - 2)^2$

Referências:

- https://www1.educacao.pe.gov.br/cpar/ProfessorAutor/Matem%C3%A1tica/Matem%C3%A1tica%20%20I%20%201%C2%BA%20ano%20%20I%20%20M%C3%A9dio/Fun%C3%A7%C3%B5es%20-%20Conceito.ppt
- Stewart, J., Cálculo. Volume I, 5a Edição ou 6a Edição, 2006-9. Editora Thomson.

Referências:

- Função Sobrejetora, Injetora e bijetora

https://slideplayer.com.br/slide/3658802/