Aplicações de derivada (Prob. de max/min e esboço de gráfico) - continuação

Aula 16: Tópicos de Matemática Aplicada – A1

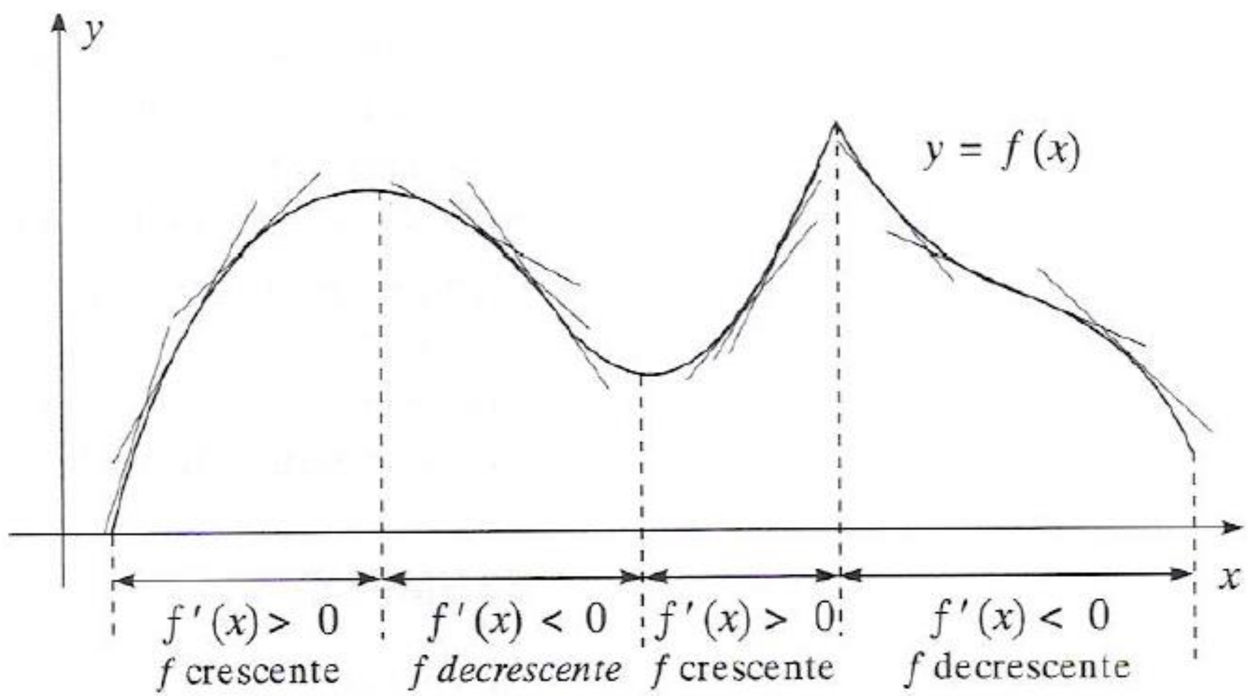
2019.1

Recapitulando...

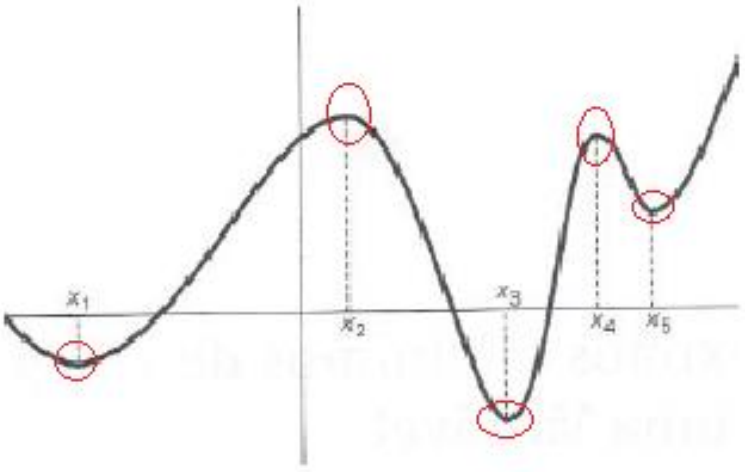
Teste da derivada primeira para funções crescentes e decrescentes: Seja f uma função contínua em um intervalo aberto I.

a) Se $f'(x) > 0$ para todo x em I então f é crescente em I

b) Se $f'(x) < 0$ para todo x em I então f é decrescente em I



Extremos relativos



Quando conhecemos os intervalos nos quais uma função é crescente ou decrescente podemos identificar os seus máximos e mínimos relativos. Um **máximo relativo** ocorre quando a função para de crescer e começa a decrescer. Um **mínimo relativo** ocorre quando a função para de decrescer e começa a crescer.

Definição: Um **ponto crítico** de uma função f é qualquer ponto c do domínio tal que $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe.

Assim, para encontrar todos os extremos relativos de uma função f, começamos achando todos os pontos críticos (que são os "candidatos" a extremos relativos). Cada ponto crítico precisa ser testado para verificar se é realmente um extremo relativo. Esse teste pode ser feito usando a derivada primeira de f.

Teste da derivada primeira para extremos relativos: Seja c um ponto crítico de f.

a) Se o sinal de f' muda de positivo para negativo em c então f possui um máximo relativo em c.

b) Se o sinal de f' muda de negativo para positivo em c então f possui um mínimo relativo em c.

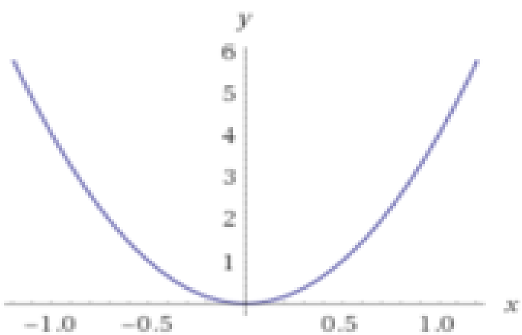
Exemplo: Verificar usando o teste de 1ª derivada onde $f(x)=x^4-4x^3$ assume máximos e mínimos relativos

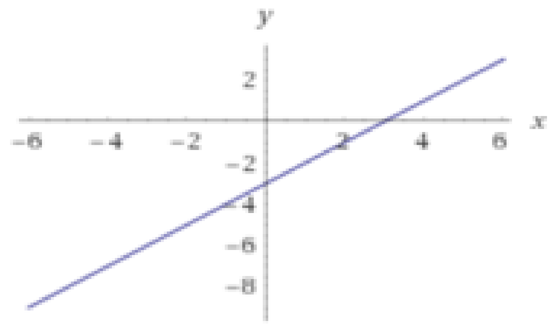
$f(x)=x^4-4x^3$

$f'(x)=4x^3-12x^2=4x^2(x-3)$. Temos que estudar onde $f'(x)>0$ e onde $f'(x)<0$

observe que

$4x^2$ $x-3$





Estudo de Sinal de $f'(x)$

	$(-\infty,0[$	$]0,3[$	$]3,+\infty)$
$4x^2$	+	+	+
$x-3$	-	-	+
$4x^2(x-3)$	-	-	+

inclinação da reta tang.

Derivadas de ordem superior

Muitas vezes precisamos calcular a taxa de variação da taxa de variação de uma grandeza. A aceleração, por exemplo, é a taxa de variação da velocidade com o tempo, mas a velocidade é a taxa de variação da distância com o tempo. Se a distância é medida em quilômetros e o tempo em horas, a velocidade é medida em quilômetro por hora e a aceleração é medida em quilômetro por hora ao quadrado.

A taxa de variação da função f(x) em relação a x é a derivada $f'(x)$; da mesma forma, a taxa de variação da função $f'(x)$ em relação a x é a derivada $(f'(x))'$. Para simplificar a notação, denotamos a derivada da derivada de f por f'' e a chamamos de **derivada de segunda ordem** (ou derivada segunda) de f.

De modo geral, o resultado de duas ou mais derivações sucessivas de uma função é uma **derivada de ordem superior**.

A **derivada de enésima ordem** de uma função $y = f(x)$ é obtida derivando-se a função n vezes e é denotada por:

$$y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n} = f^{(n)}$$

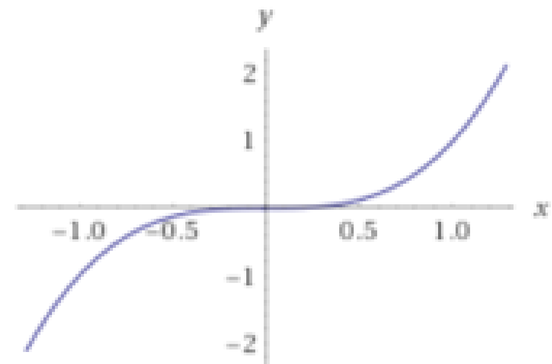
Exemplo: Se a posição de um carro que está se movendo em linha reta é dada, no instante t por $s(t) = t^3 - 3t^2 + 4t$, calcule a velocidade e a aceleração do carro.

Solução: A velocidade é $v(t) = \dfrac{ds}{dt} = 3t^2 - 6t + 4$

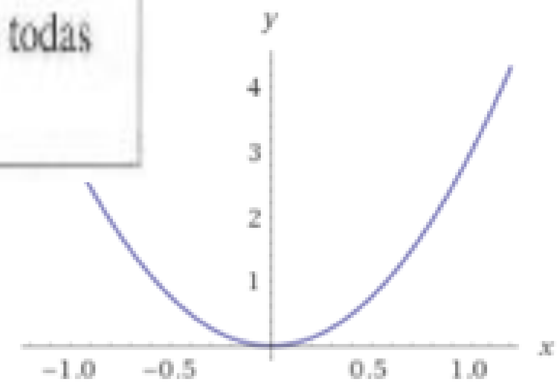
A aceleração é $a(t) = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d^2s}{dt^2} = 6t - 6$

O que f’’ nos diz sobre f?

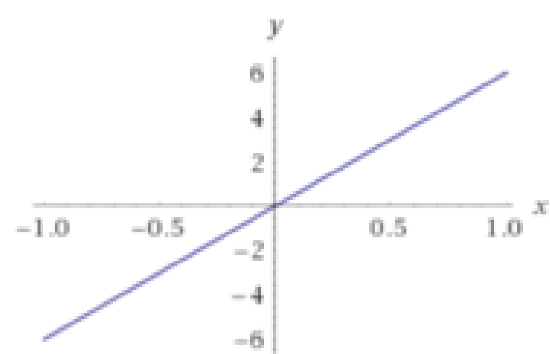
f(x)=x^3



DEFINIÇÃO Se o gráfico de f estiver acima de todas as suas tangentes no intervalo I, então ele é dito **côncavo para cima** em I. Se o gráfico de f estiver abaixo de todas as suas tangentes em I, é dito **côncavo para baixo** em I.



f’’(x)=6x



TESTE DA CONCAVIDADE

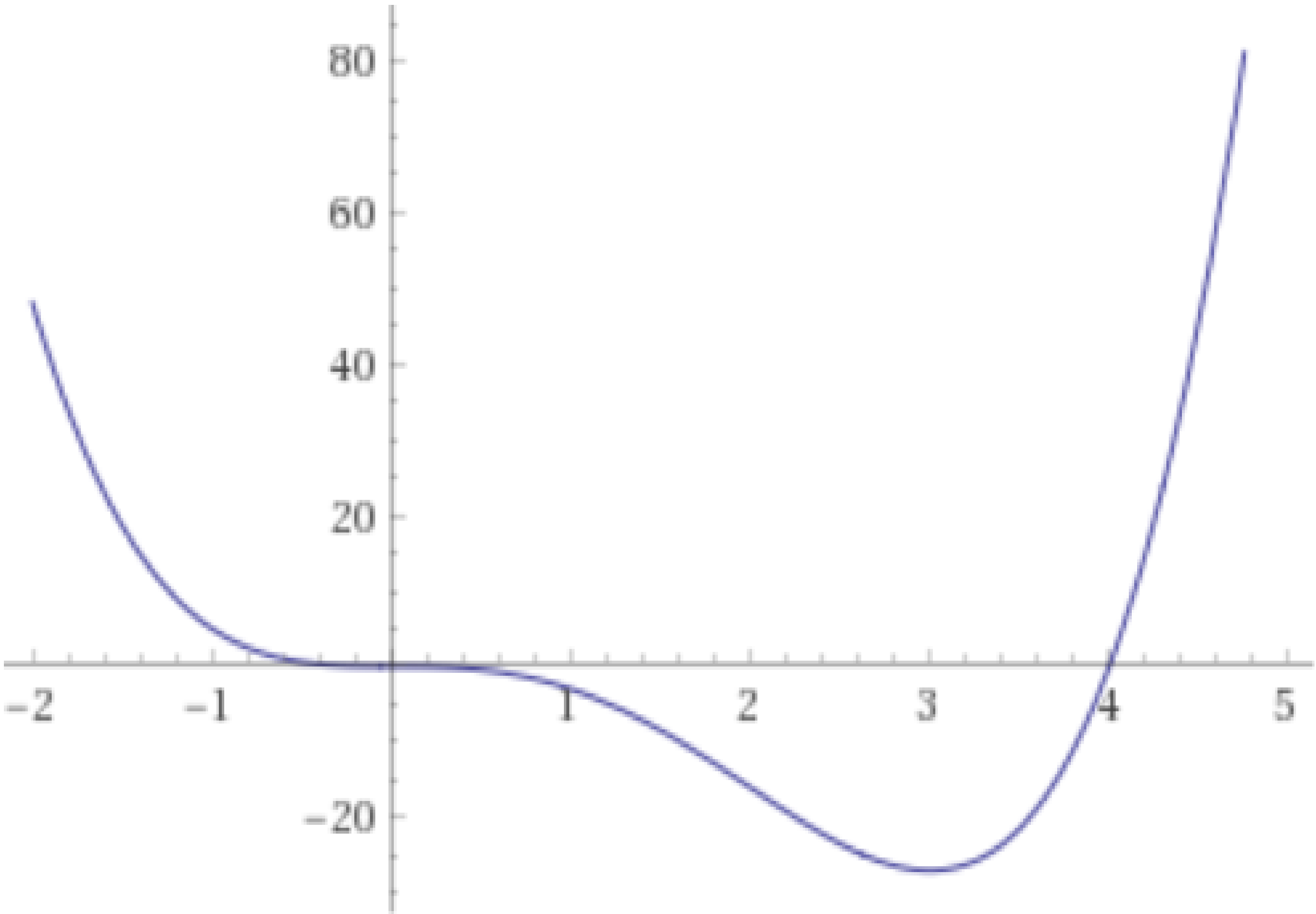
(a) Se $f''(x) > 0$ para todo x em I, então o gráfico de f é côncavo para cima em I.

(b) Se $f''(x) < 0$ para todo x em I, então o gráfico de f é côncavo para baixo em I.

DEFINIÇÃO Um ponto P na curva $y = f(x)$ é chamado **ponto de inflexão** se f é contínua no ponto e a curva mudar de côncava para cima para côncava para baixo ou vice-versa em P.

- Exemplo: Estude a concavidade da função $f(x)=x^4-4x^3$ e indique seus pontos de inflexão caso existam.

$f(x)=x^4-4x^3$



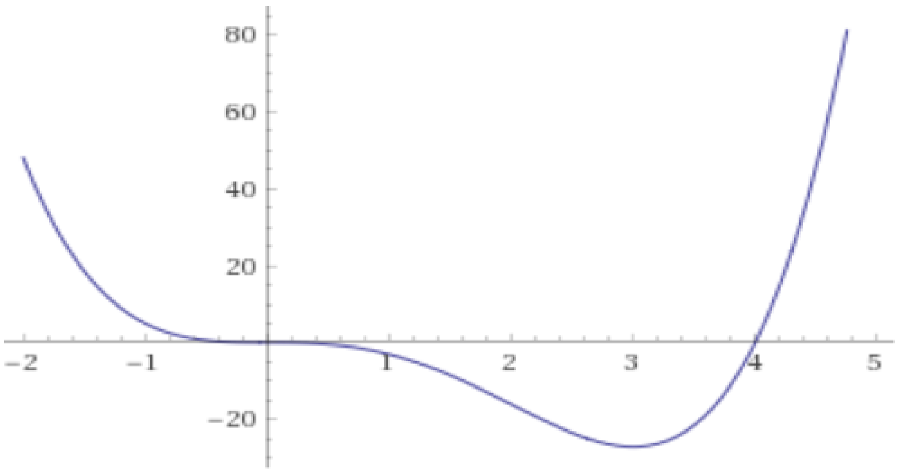
Teste da segunda derivada

Outra aplicação da segunda derivada é o teste a seguir para os valores máximo e mínimo. Ele é uma consequência do Teste da Concavidade.

TESTE DA SEGUNDA DERIVADA Suponha que f'' seja contínua na proximidade de c.

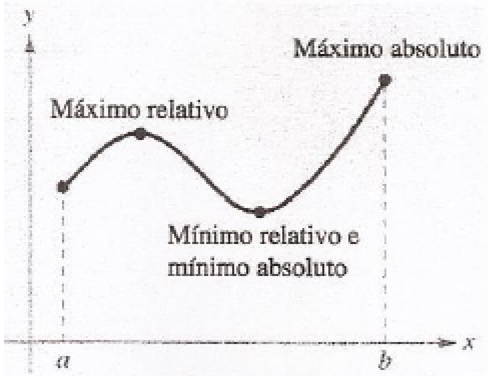
(a) Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) > 0$, então f tem um mínimo local em c.

(b) Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) < 0$, então f tem um máximo local em c.



Máximos e mínimos em intervalos fechados (pg 53 – Apostila)

Em muitos problemas de otimização, o objetivo é encontrar o "mínimo absoluto" ou o "máximo absoluto" de uma função dentro de certo intervalo fechado de interesse.



Podemos provar que se uma função f é contínua em um intervalo [a, b] então f tem um máximo absoluto e um mínimo absoluto em algum ponto do intervalo. Além disso, se f é uma função contínua em [a, b], um extremo absoluto de f ocorrerá num extremo relativo em]a, b[(como o mínimo absoluto da figura) ou nas extremidades do intervalo (como o máximo absoluto da figura).

Então, para encontrar os extremos absolutos de uma função contínua f em [a, b] devemos:

1 – Achar todos os pontos críticos c de f em]a, b[

2 – Calcular todos os valores f(c) para os pontos críticos do passo 1 e determinar f(a) e f(b).

3 – Selecionar o maior e o menor dos valores do passo 2. Esses são, respectivamente, os valores de máximo e mínimo absolutos de f em [a, b].

Dever de casa

- Ver exemplo na pág 53 da apostila:

Exemplo: Durante várias semanas, o departamento de trânsito vem registrando a velocidade dos veículos que passam em certo quarteirão. Os resultados mostram que entre 13h e 19h de um dia de semana, a velocidade nesse quarteirão é dada aproximadamente por $v(t) = t^3 - 10{,}5t^2 + 30t + 20$ quilômetros por hora, onde t é o número de horas após o meio dia. Em que instante entre 13h e 19h o trânsito é mais rápido? Em que instante é mais lento?

Referências:

- Apostila elaborada pela Profa. Maria Emília Neves Cardoso – Complementos de Matemática Aplicada
- Material de apoio:
  Stewart, J., Cálculo. Volume I, 5a Edição ou 6a Edição, 2006-9. Editora Thomson