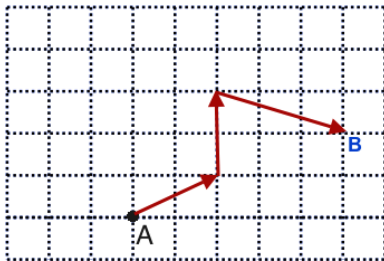


Gabarito

1ª Questão:

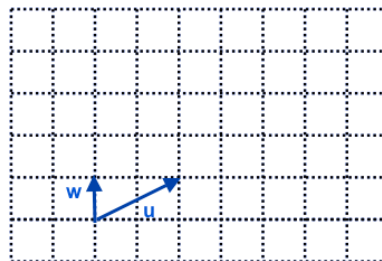
Usando os vetores da figura 1, esboce **detalhadamente** as operações dadas no respectivo quadriculado. Além disso, em cada operação, diga se o resultado é um ponto ou um vetor.

a) $\vec{u} + 2\vec{w} - \vec{v} + A$.



A solução é o ponto B.

b) $\text{Proj}_{\vec{w}}(\vec{u})$.



$\vec{w} = \text{Proj}_{\vec{w}}(\vec{u})$.

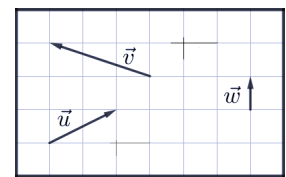


figura 1

2ª Questão:

Considere o ponto $C = (1, 2)$ e a reta $r = \{(t + 3, 2t + 2); t \in \mathbb{R}\}$.

- a) Determine a distância do ponto C à reta r sem usar fórmula de distância de ponto à reta.

SOLUÇÃO: Considere a reta $l \perp r$ que passa por C . Como $r/\vec{v} = (1, 2)$, então $l \perp \vec{v}$ e, consequentemente, $l : x + 2y = c$. Substituindo as coordenadas do ponto C na equação de l , descobrimos c , isto é, $c = 1 + 2(2) = 5$. Logo $l : x + 2y = 5$. Calculando a interseção entre l e r , encontramos o ponto $Q = (13/5, 6/5)$. Assim, a distância de C à r é $d(C, Q) = \frac{4\sqrt{5}}{5}$.

- b) Determinar as equações paramétricas da reta ℓ que passa pelo ponto C e faz um ângulo de 60° com o eixo OX .

Solução: Queremos uma reta ℓ que passa por $(1, 2)$ onde o vetor $\vec{v} = (a, b)$, paralelo a ela, deve fazer um ângulo de 60° com o vetor $(1, 0)$ ($(1, 0)$ é paralelo ao eixo OX). Observe que $a \neq 0$, caso contrário, o vetor $\vec{v}$ seria perpendicular ao eixo OX que não é o caso. Então, podemos considerar como vetor paralelo a ℓ o vetor da forma $(1, b/a)$, ou ainda, fazendo $d = b/a$, podemos considerar tomar $\vec{w} = (1, d)$ como vetor paralelo a ℓ .

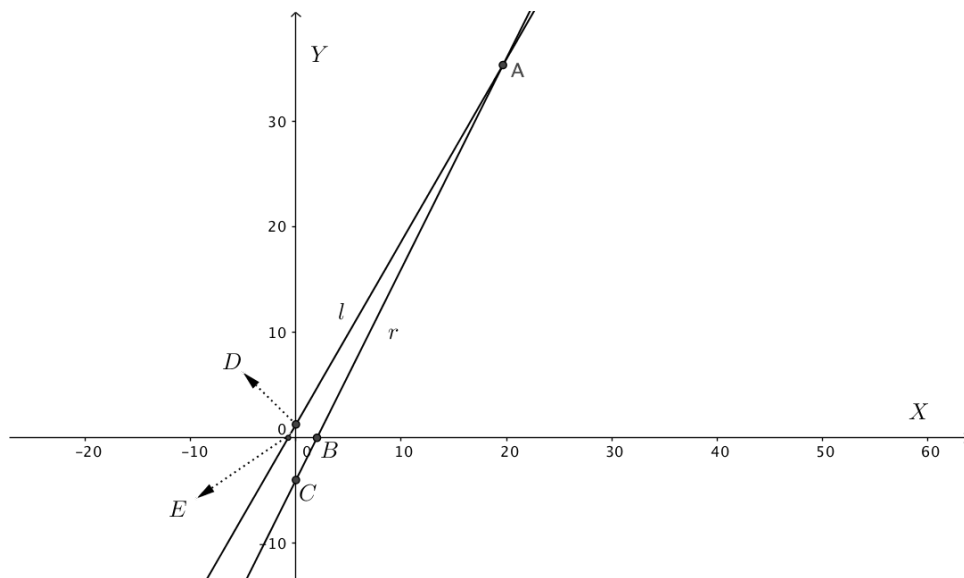
Assim:

$$\frac{1}{2} = \cos 60^\circ = \frac{\langle (1, 0), (1, d) \rangle}{\sqrt{1 + d^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + d^2}},$$

isto é, $d = \pm\sqrt{3}$. Como o ângulo entre as retas é de 60° , então devemos ter $d = \sqrt{3}$. Logo ℓ passa por $(1, 2)$ e é paralela a $\vec{w} = (1, \sqrt{3})$ e, portanto suas equações paramétricas são

$$\ell : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + \sqrt{3}t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

- c) No mesmo sistema de eixos coordenados faça um esboço de ℓ e r , deixando claro a posição relativa entre elas.



As retas são concorrentes, com ponto de interseção em $A = (4\sqrt{3} + 9, 8\sqrt{3} + 14)$, $B = (2, 0)$, $C = (0, -4)$, $D = (0, 2 - \sqrt{3})$ e $E = (\frac{3-2\sqrt{3}}{3}, 0)$.

3ª Questão:

Seja C o círculo de centro no ponto de interseção das retas $r_1 : \begin{cases} x = 1 + 2s \\ y = -s \end{cases}$ e $r_2 : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 - t \end{cases}$, com $s, t \in \mathcal{R}$, que é tangente à reta $r : x + 2y = 2$. Determine a equação de C .

Solução: Como o centro do círculo está na interseção das retas r_1 e r_2 , devemos encontrar t ou s na solução do sistema:

$$\begin{cases} 1 + 2s = 3 + t \\ -s = 1 - t \end{cases}$$

Assim, resolvendo o sistema acima, $t = 4$ e $s = 3$ e, substituindo t nas equações de r_2 ou s nas equações de r_1 , temos que o centro do círculo é o ponto $(7, -3)$.

Agora, temos que o raio $\mathcal{R}$ de C é dado por

$$\mathcal{R} = d(r, (7, -3)) = \frac{|7 - 6 - 2|}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Então a equação do círculo é:

$$C : (x - 7)^2 + (y + 3)^2 = \frac{1}{5}.$$

4ª Questão:

Uma Elipse $\mathcal{E}$ tem seu centro na origem e um dos seus vértices sobre a reta focal é $(0, 7)$. Se a elipse passa pelo ponto $(\sqrt{5}, \frac{14}{3})$, determine sua equação, as equações dos eixos focais e não focais e faça um esboço da elipse, identificando seus vértices e focos.

SOLUÇÃO:

$$\mathcal{E} : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{49} = 1$$

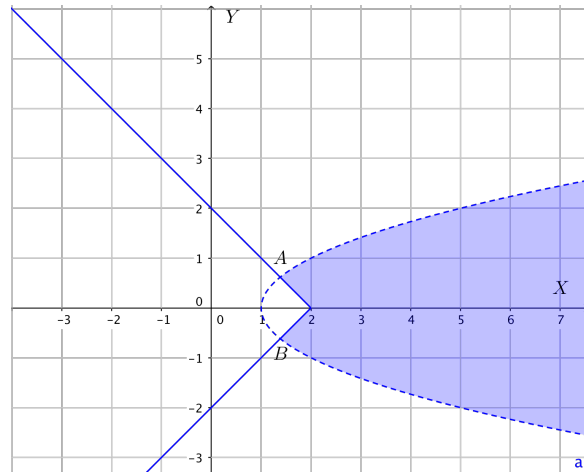
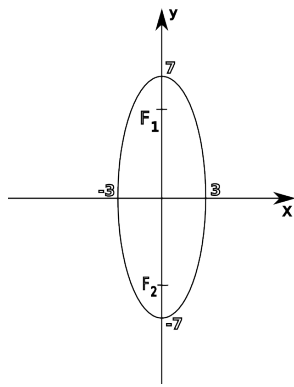
Vértices: $A_1 = (0, -7)$, $A_2 = (0, 7)$, $B_1 = (-3, 0)$ e $B_2 = (3, 0)$. Focos: $F_1 = (0, 2\sqrt{10})$ e $F_2 = (0, -2\sqrt{10})$.

5ª Questão:

Faça um esboço detalhado da região

$$\mathcal{R} : \begin{cases} y^2 < x - 1 \\ x + |y| \geq 2 \end{cases}$$

e identifique os objetos de equações $y^2 = x - 1$ e $x + |y| = 2$. **Solução:**



onde $A = \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$ e $B = \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$