UFF - Universidade Federal Fluminense
IME - Instituto de Matemática e Estatística
GGM - Departamento de Geometria
Exercícios Propostos e Resolvidos

1^a Questão:

Determine as equações cartesianas dos planos paralelos ao plano $\Pi : 2x + 2y - z + 4 = 0$ e que distam 5 unidades do ponto $P(1, 3, 3)$

Solução: Queremos encontrar todos os planos $\Lambda : ax + by + cz + d = 0$ tais que $\Lambda \mid\mid \Pi$ e $d(P, \Lambda) = 5$.
Como $\Lambda \mid\mid \Pi$, podemos considerar $(a, b, c) = (2, 2, -1)$.
Aplicando a fórmula da distância vem:

$$\begin{aligned} 5 &= d(P, \Lambda) \\ &= \frac{|a + 3b + 3c + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\ &= \frac{|2 + 6 - 3 + d|}{\sqrt{4 + 4 + 1}} \\ &= \frac{|5 + d|}{3} \end{aligned}$$

Donde concluímos que $d = 10$ ou $d = -20$.
Assim temos os planos:

$$\Lambda : 2x + 2y - z + 10 = 0 \text{ ou } \Lambda : 2x + 2y - z - 20 = 0$$

2^a Questão:

Sejam a reta $r : \{(3 + t, 2 + t, -1 + t)|\ t \in \mathbb{R}\}$ e o plano $\Pi : 6x - y + 2z = 4$.

a) Determine a distância entre r e Π.

b) Encontre a equação do plano Γ que contém a reta r e é ortogonal ao plano Π.

Solução:

a) As equações paramétricas de r podem ser escritas como $r : (3, 2, -1) + t(1, 1, 1)$. Logo o vetor diretor de r é $v = (1, 1, 1)$. O vetor normal ao plano Π é $n = (6, -1, 2)$. Então, para determinar a posição relativa entre r e Π, basta calcular o produto interno

$$\langle n, v\rangle = \langle (6, -1, 2), (1, 1, 1)\rangle = 7 \neq 0$$

Logo $r \cap \Pi \neq \emptyset$ e r não está contida em Π, ou seja, a reta intersecta o plano em um único plano e, consequentemente, a distância é zero.

b) Chamemos de $\overrightarrow{\eta}$ o vetor normal do plano Γ que queremos encontrar. Como $r \subset \Gamma$, devemos ter $\overrightarrow{\eta} \perp \overrightarrow{v}$ e como Γ e Π devem ser perpendiculares, também temos $\overrightarrow{\eta} \perp \overrightarrow{n}$. Portanto, podemos concluir que uma possibilidade de calcularmos $\overrightarrow{\eta}$?

$$\overrightarrow{\eta} = \overrightarrow{n} \times \overrightarrow{v} = (6, -1, 2) \times (1, 1, 1) = (-3, -4, 7)$$

Então, a equação do plano Γ ? $-3x - 4y + 7z = d$. Para encontrar d, basta escolhermos um ponto do plano: como $r \subset \Gamma$, tomamos $t = 0$ na reta r e obtemos o ponto $(3, 2, -1)$ que deve estar em Γ. Daí, substituindo chegamos à equação

$$\Gamma : -3x - 4y + 7z = -24$$

3^a Questão:

Considere as esferas de equações

$$S_1 : x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 12y + 12z + 72 = 0$$

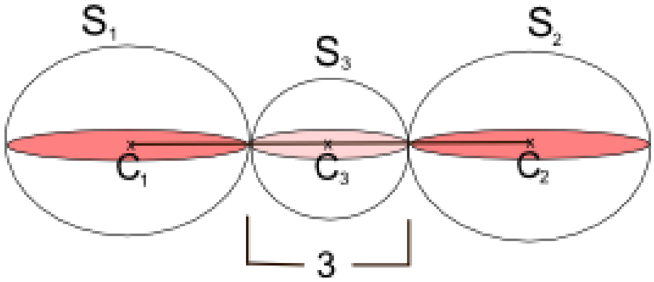
$$S_2 : x^2 + y^2 + z^2 = 9$$

Encontre a equação de uma esfera S_3 tangente à S_1 e à S_2 de forma que os três centros sejam colineares.

Solução: Completando quadrados na equação de S_1, temos

$$S_1 : (x-3)^2 + (y-6)^2 + (z+6)^2 = 9.$$

Assim, S_1 tem centro $C_1 = (0,0,0)$ e raio $r_1 = 3$, e S_2 tem centro $C_2 = (3,6,-6)$ e raio $r_2 = 3$. Além disso, a distância entre C_1 e C_2 é $d(C_1, C_2) = \sqrt{3^2 + 6^2 + (-6)^2} = 9 > r_1 + r_2 = 6$. Logo, podemos tomar S_3 de centro C_3 e raio $r_3 = 3/2$ como mostra a figura:



Observe que a reta r, que contém os três centros, passa por $C_1 = (0,0,0)$ e é paralela ao vetor $(1,2,-2)$ que é múltiplo do vetor $\overrightarrow{C_1C_2} = (3,6,-6)$. Assim temos

$$r : \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = -2t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Como $C_3 \in r$, devemos ter $C_3 = (t, 2t, -2t)$, para algum $t \in \mathbb{R}$. Mas, a distância entre C_1 e C_3 deve ser $r_1 + r_3 = 3 + 3/2 = 9/2$, isto é,

$$\sqrt{t^2 + 4t^2 + 4t^2} = 9/2 \ \Rightarrow\ 9t^2 = 81/4 \ \Rightarrow\ t = \pm 3/2.$$

Logo $C_3 = (3/2, 3, -3)$ ou $C_3 = (-3/2, -3, 3)$. Como a distância entre C_3 e C_2 também é $9/2$, então (com um simples cálculo de distância) devemos ter $C_3 = (3/2, 3, -3)$.

Assim, temos que S_3 tem centro $C_3 = (3/2, 3, -3)$ e raio $3/2$ e, consequentemente, sua equação é

$$S_3 : (x - 3/2)^2 + (y-3)^2 + (z+3)^2 = 9/4.$$