**Geometria Analítica e Cálculo Vetorial**

**Turma F3 - Segunda Prova**

*Gabarito*

1. **(Valor: 3,0)** Considere a reta $r: \begin{cases} x+y+2z=1 \\ -x+3y+z=-1 \end{cases}$ e o plano $\Pi: 3x-y+3z=2$.

   (a) Determine as equações paramétricas de $r$.

   (b) Determine a distância de $r$ a $\Pi$.

   (c) Determine, se possível, a equação cartesiana do plano $\Pi'$ que é paralelo ao plano $\Pi$ e contém $r$.

***SOLUÇÃO:***

(a)

$$r: \begin{cases} x = 1 + 5t/3 \\ y = t \\ z = -4t/3 \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

(b) Substituindo as equações paramétricas de $r$ na equação cartesiana de $\Pi$, vemos que:

$$3(1+5t/3) - t + 3(-4t/3) = 2 \qquad 3 = 2 \qquad \text{Absurdo!}$$

Logo, $r$ é paralela ao plano e, portanto, para calcular a distância pedida, escolhemos um ponto da reta, digamos $P = (1,0,0)$ e temos que

$$d(r,\Pi) = d(P,\Pi) = \frac{|3(1) - 0 + 3(0) - 2|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2 + 3^2}} = \frac{1}{\sqrt{20}}$$

(c) Como os planos são paralelos, então eles têm o mesmo vetor perpendicular. Logo $\Pi' : 3x - y + 3z = c$. Para encontrar $c$, precisamos de um ponto pertencente à $\Pi'$. Mas o enunciado diz que $\Pi'$ contém $r$ e assim qualquer ponto de $r$ pertence a $\Pi'$, por exemplo, $P$ do item anterior. Então, substituindo as coordenadas de $P$ na equação $3x - y + 3z = c$, encontramos $c = 3$ e, com isso, $\Pi' : 3x - y + 3z = 3$.

2. **(Valor: 4,0)** Considere o plano $\alpha : 2x + y + z = 1$ e as retas

$$r = \{(2+2s, -3+5s, 1-4s);\ s \in \mathbb{R}\}, \quad m = \{(1+2t, 4+t, 2+4t),\ t \in \mathbb{R}\}.$$

   (a) Parametrize $\alpha$.

   (b) Determine o ângulo entre $r$ e $\alpha$.

   (c) Determine a posição relativa entre as retas.

   (d) Determine a distância entre as retas.

***SOLUÇÃO:***

a) Tomando três pontos não colineares pertencentes ao plano, por exemplo $P_1 = (0,0,1)$, $P_2 = (0,1/2,1/2)$ e $P_3 = (1/2,0,0)$, temos os vetores paralelos ao plano $\overrightarrow{P_1P_2} = (0,1/2,-1/2)$ e $\overrightarrow{P_1P_3} = (1/2,0,-1)$. Assim, escolhendo tais vetores paralelos ao plano e o ponto $P_1$, podemos parametrizar $\alpha$ da forma:

$$\alpha : \begin{cases} x = \frac{s}{2} \\ y = \frac{t}{2} \\ z = 1 - \frac{t}{2} - s \end{cases} \qquad t, s \in \mathbb{R}$$

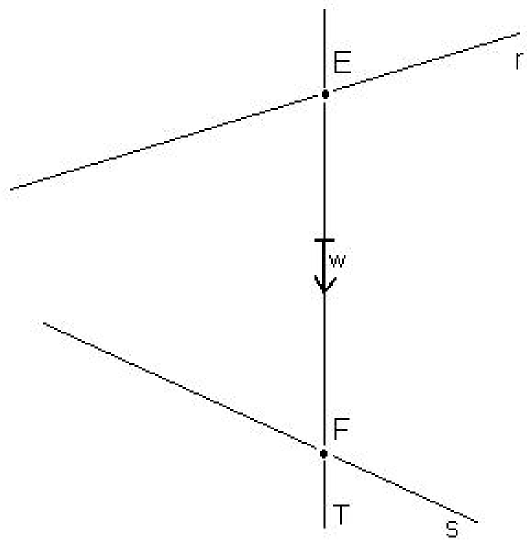
b) Como $\vec{v} = (2,1,1) \perp \alpha$ e $\vec{w} = (2,5,-4) || r$, segue que

$$\sin < (r,\alpha) = \frac{| < \vec{v}, \vec{w} > |}{|\vec{v}|\,|\vec{w}|} = \frac{5}{\sqrt{6}\sqrt{45}} = \frac{5}{3\sqrt{30}}.$$

Logo o ângulo entre $r$ e $\alpha$ é $\theta = \arcsin \frac{5}{3\sqrt{30}}$.

c) As retas são reversas. Para isso, basta verificar que os vetores paralelos às retas não são múltiplos ( o que implica em serem concorrentes ou reversas) e, para concluir que são reversas, basta verificar que não se interceptam. **Cuidado**: Se você só verificou que elas não se interceptam, não pode concluir que são reversas, pois poderiam ser paralelas também!

d) Os vetores paralelos à $r$ e $m$ são, respectivamente, $\vec{u} = (2, 5, -4)$ e $\vec{v} = (2, 1, 4)$. Para calcular tal distância, devemos encontrar o vetor $\vec{EF}$ perpendicular aos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, com $E \in r$ e $F \in s$. Desta forma, a distância entre as retas será $|\ \vec{EF}\ |$. Veja a figura para ilustrar:




Logo, devemos ter $E = (2 + 2s, -3 + 5s, 1 - 4s)$, para algum $s \in \mathbb{R}$, e $F = (1 + 2t, 4 + t, 2 + 4t)$, para algum $t \in \mathbb{R}$. Assim, $\vec{EF} = (-1 + 2t - 2s, 7 + t - 5s, 1 + 4t + 4s)$ deve ser paralelo ao vetor $\vec{v} \times \vec{u} = \vec{w} = (24, -16, -8)$, isto é, deve existir $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{EF} = \lambda w$, ou ainda:

$$\begin{cases} -1 + 2t - 2s &= 24\lambda, \\ 7 + t - 5s &= -16\lambda, \\ 1 + 4t + 4s &= -8\lambda. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema temos $s = 3/4$, $t = -19/28$ e $\lambda = -9/56$. Logo $E = (7/2, 3/4, -2)$, $F = (-\frac{5}{14}, \frac{93}{28}, -\frac{5}{7})$ e, consequentemente, a distância é $|\ \vec{EF}\ | = \frac{9\sqrt{14}}{7}$.

3. **(Valor: 2,5)** Considere a esfera de equação

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4z - 4 = 0$$

Encontre as condições sobre o raio de uma esfera com centro em $(1, -3, 6)$ a fim de que esta não intersecte a primeira esfera.

***SOLUÇÃO:***

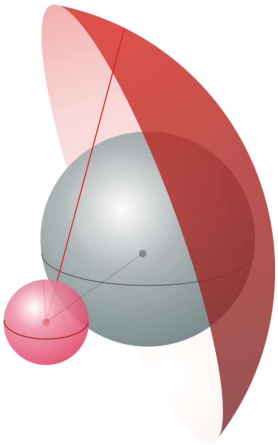
Completando quadrados na equação dada teremos

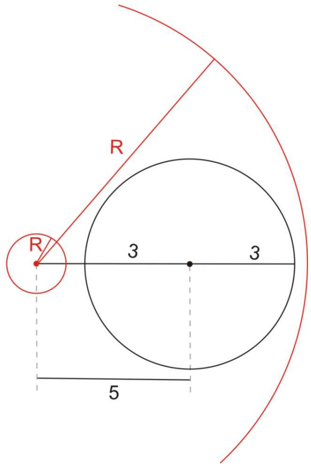
$$(x - 1)^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 9$$

Portanto, trata-se de uma esfera de centro em $A_1 = (1, 0, 2)$ e raio $R_1 = 3$.

Vamos calcular a distância entre os centros $L = d((1, 0, 2), (1, -3, 6)) = \sqrt{9 + 16} = 5$.

Chamando de $R$ o raio da esfera que tem centro em $A_2 = (1, -3, 6)$, podemos cocluir que para que as duas esferas não se intersectem devemos ter $R < 2$ ou $R > 8$






4. **(Valor: 2,5)** Considere a superfície de equação $S: -x^2+y^2+z^2-4y+2z+5=0$.

   (a) Identifique $S$ e a curva $\mathcal{C}$ de interseção com $S$ e o plano $x=0$, faça um esboço de $S$ e $\mathcal{C}$ no mesmo gráfico.

   (b) Encontre uma reta contida em $S$ que passe por $(3,2,2) \in S$.

***SOLUÇÃO:***

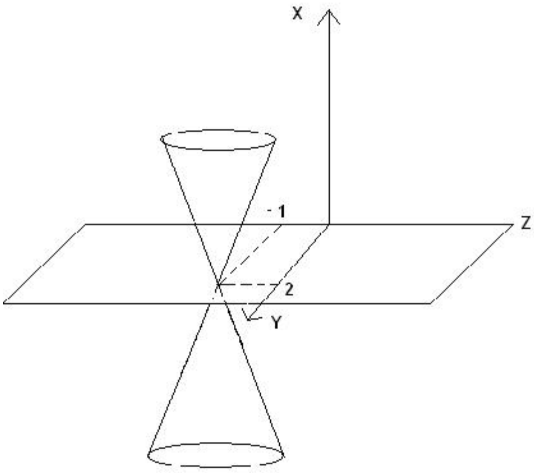
(a) Completando quadrados:

$$-x^2+y^2+z^2-4y+2z+5=0 \Longleftrightarrow -x^2+y^2-4y+z^2+2z=-5$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$-x^2+(y-2)^2+(z+1)^2=-5+4+1=0 \Longleftrightarrow (y-2)^2+(z+1)^2=x^2.$$

Vemos que $S$ é um cone circular reto de vértice $V=(0,2,-1)$:




Além disso, repare que a interseção com $S$ e o plano $x=0$ dá uma degeneração que é o ponto $P=(0,2,-1)$.

(b) A reta procurada é $r=\{(3+t,2,2+t),\, t\in\mathbb{R}\}$.

5. **(Valor: 1,0)** Sejam $P=(2,1,-1)$ e $Q=(0,-1,0)$. Dados $A=(0,3,0)$ e $B=(6,3,3)$, determine possíveis pontos $C$ da reta $\overleftrightarrow{PQ}$ tal que a área do paralelogramo de lados não paralelos $AC$ e $AB$ seja 18.

**Solução:** Como $C \in \overleftrightarrow{PQ}$, então devemos ter $C = (2-2t, 1-2t, -1+t)$, para algum $t \in \mathbb{R}$. Assim, temos que a área do referido paralelogramo é:

$$\left\|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}\right\| = \left\| \begin{array}{ccc} i & j & k \\ \\ 2-2t & -2-2t & -1+t \\ \\ 6 & 0 & 3 \end{array} \right\| = 18$$

$$18 = \|(-6-6t, -12+12t, 12+12t)\| = 6\,\|(-1-t, -2+2t, 2+2t)\|$$

$$3 = \|(-1-t, -2+2t, 2+2t)\| = \sqrt{(1+t)^2 + (-2+2t)^2 + (2+2t)^2}$$

$$9 = 1 + 2t + t^2 + 4 - 8t + 4t^2 + 4 + 8t + 4t^2$$

$$9t^2 + 2t = 0$$

$$t(9t+2) = 0$$

$$t = 0 \;\text{ ou }\; t = -2/9$$

Logo, $C = P$, para $t = 0$, ou $C = (22/9, 13/9, -11/9)$, para $t = -2/9$.