Exercícios de Geometria Diferencial.
LISTA III.

1. Provar que se uma superfície orientável e conexa S é plana e mínima, então S é um aberto de um plano afim. Deduzir que os planos afins são as únicas superfícies orientáveis, conexas e fechadas (como subconjuntos de $\mathbb{R}^3$) planas e mínimas.
2. Provar que se uma superfície orientável S e um plano afim P se cortam de forma tangente ao longo do traço de uma curva regular α, então a curvatura de Gauss de S é zero ao longo do traço de α.
3. Seja S uma superfície orientável e P um plano afim. Suponha que S e P se cortam ao longo duma curva regular α formando um ângulo constante. Provar que α é uma linha de curvatura de S.
4. Em cada um dos seguintes casos calcular uma base ortonormal de direções principais, a curvatura de Gauss e a curvatura média da superfície S no ponto p:
   (a) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + az^2 = 1\}, \qquad p = (1, 0, 0) \qquad a \geq 1.$
   (b) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ \cos x + \cos y + \cos z = 0\}, \qquad p = (0, \pi, \pi/2).$
   (c) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = xy\}, \qquad p = (0, 0, 0).$
5. Considere o hiperboloide de uma folha $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$. Provar que dado qualquer $p = (x, y, z) \in S$, os vetores
$$e_1 = (-y, x, 0), \qquad e_2 = (xz, yz, 1 + z^2)$$
   formam uma base ortogonal de direções principais. Calcule $H(p)$ e $K(p)$.
6. Seja S uma superfície orientável e seja $N : S \to \mathbb{S}^2$ sua aplicação de Gauss. Considere a dilatação centrada na origem dada por $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\phi(p) = \lambda p$, $\lambda > 0$. Seja $S' = \phi(S)$. Prove que a aplicação $N' : S' \to \mathbb{S}^2$ definida como $N'(\phi(p)) = N(p)$ é a aplicação de Gauss de S'. Estude como se relacionam a primeira e segunda forma fundamental de S e S' assim como suas curvaturas média e Gaussiana.
7. Seja S uma superfície regular orientável e $N : S \to \mathbb{S}^2$ sua aplicação de Gauss. Para cada $r \in \mathbb{R}$ definimos como
$$S_r = \{p + rN(p), \ p \in S\}$$
   a superfície paralela à S a distância r. Calcule a aplicação de Gauss de S_r assim como suas curvaturas relacionando-as com as curvaturas de S.
8. Seja $\phi : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ a inversão com respeito à origem dada por
$$\phi(p) = \frac{p}{|p|^2}.$$
   (a) Prove que ϕ é um difeomorfismo cuja inversa é o próprio ϕ. Calcule sua diferencial e prove que preserva ângulos entre vetores.
   (b) Seja $S \subset \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ uma superfície orientável e $N : S \to \mathbb{S}^2$ sua aplicação de Gauss. Se $S' = \phi(S)$, prove que a aplicação $N : S' \to \mathbb{S}^2$ dada por
$$N'(\phi(p)) = N(p) - \frac{2\langle p, N(p)\rangle p}{|p|^2}$$
   é a aplicação de Gauss de S'.
   (c) Provar que as curvaturas média e de Gauss de S e S' se relacionam mediante as seguintes igualdades:
$$K'(\phi(p)) = |p|^4 K(p) + 4|p|^2 \langle p, N(p)\rangle H(p) + 4\langle p, N(p)\rangle^2,$$
$$H'(\phi(p)) = |p|^2 H(p) + 2\langle p, N(p)\rangle.$$
   Concluir que se p é umbilical em S, então $\phi(p)$ é umbilical em S'.
9. Calcular as curvaturas de Gauss e média de uma superfície de revolução.
10. Use o exercício anterior para construir:

   (a) Uma superfície de revolução com um único paralelo de pontos planos.
   (b) Uma superfície de curvatura de Gauss constante $K = -1$.

11. Classifique as superfícies de revolução planas.
12. Classifique as superfícies de revolução mínimas cuja curva geratriz seja uma gráfica sobre o eixo de rotação.
13. Provar que o helicoide é uma superfície mínima e calcular sua curvatura de Gauss.
14. Seja S uma superfície compacta. Provar que existe uma esfera $\mathbb{S}^2(0, R)$ tangente à S em um ponto $p_0 \in S \cap \mathbb{S}^2(0, R)$ tal que $K(p_0) \geq 1/R^2$.
15. Seja S uma superfície conexa orientável e fechada. Definimos o quadrado da norma da segunda forma fundamental como:
$$|II|^2(p) = k_1^2(p) + k_2^2(p), \qquad p \in S,$$
sendo k_i, $i = 1, 2$ as curvaturas principais de S. Provar que $|II|^2(p) \geq 2H(p)^2$ e que se a igualdade acontece em todo ponto $p \in S$ então S é uma esfera ou um plano.