Exercícios de Geometria Diferencial.
LISTA IV.

1. Sejam X e Y dois campos de vetores em um aberto $U \subset S$ que são linearmente independentes em um ponto $p \in U$. Prove que é possível parametrizar uma vizinhança $V \subset U$ de p de forma que $\forall q \in V$ as curvas coordenadas passando por q coincidem com as curvas integrais de $X(q)$ e $Y(q)$.
2. Prove que $\forall p \in S$ existe uma parametrização $X(u, v)$ em uma vizinhança V de p de forma que as curvas coordenadas se intersectam perpendicularmente para cada $q \in V$. Diz-se que tal parametrização é *ortogonal*.
3. Seja $p \in S$ um ponto hiperbólico de S. Demonstre que é possível parametrizar uma vizinhança de p de forma que as curvas coordenadas da parametrização sejam as curvas assintóticas de S.
4. Seja $p \in S$ um ponto não umbílico. Demonstre que é possível parametrizar uma vizinhança de p de forma que as curvas coordenadas sejam linhas de curvatura.
5. Sejam $\alpha_1, \alpha_2 : I \to \mathbb{R}^3$ duas curvas regulares p.p.c.a. tais que suas curvaturas k_{α_1} e k_{α_2} satisfazem $k_{\alpha_1} = k_{\alpha_2} \neq 0$, $s \in I$. Seja V uma vizinhança dum ponto (s_0, v_0) tal que
$$X_1(s, v) = \alpha_1(s) + v\alpha_1'(s), \qquad X_2(s, v) = \alpha_2(s) + v\alpha_2'(s)$$
sejam superfícies regulares. Demonstre que $X_1(V)$ e $X_2(V)$ são superfícies isométricas. Deduza do anterior que $X_1(V)$ é localmente isométrico à um aberto do plano.
6. Seja $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um movimento rígido e S uma superfície tal que $F(S) = S$. Demonstre que F restringido à S é uma isometria de S em ela mesma. Deduza assim que se S é uma superfície de revolução com eixo $\boldsymbol{e}$ então os giros ao redor de $\boldsymbol{e}$ são isometrias da superfície em ela mesma.
7. Seja S o cilindro de equação $x^2 + y^2 = 1$. Construa uma isometria de S em ele mesmo com exatamente dois pontos fixos.
8. Demonstre que em uma parametrização isotérmica a curvatura de Gauss pode se calcular como
$$K = -\frac{1}{2E}\Delta \log E.$$
Onde Δf denota a Laplaciana de f para os parâmetros (u, v), ou seja $\Delta f = f_{uu} + f_{vv}$.
9. Seja $X(u, v)$ uma parametrização de uma superfície da qual sabemos que $E = 4/(1 + u^2 + v^2)^2 = G$, $F = 0$. Calcula sua curvatura de Gauss. Faz a mesma operação para uma parametrização $Y(u, v)$ na qual $E = 4/(1 - u^2 - v^2)^2 = G$, $F = 0$, com $u^2 + v^2 < 1$.
10. Considere
$$E = 1 + 4u^2, \quad F = 0, \quad G = u^4, \quad e = \frac{-2u^2}{\sqrt{u^4 + 4u^6}}, \quad f = 0, \quad g = \frac{u^4}{u^4 + 4u^6}$$
com $u > 0$. Demonstre que para qualquer ponto (u_0, v_0) existe uma vizinhança dele, U, e uma parametrização $X : U \to \mathbb{R}^3$ de uma superfície tal que os símbolos da primeira e segunda forma fundamental dela são os anteriores.
11. Demonstre que as superfícies parametrizadas como
$$X(u, v) = (u \cos v, u \sin v, \log u), \qquad Y(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v)$$
tem a mesma curvatura de Gauss nos pontos $X(u, v)$ $Y(u, v)$, porém, $Y \circ X^{-1}$ não é uma isometria.
12. Considere um helicoide, um cilindro circular reto e uma esfera. Demonstre que nenhuma dessas três superfícies pode ser localmente isométrica a nenhuma outra delas.

13. Seja X uma parametrização de uma superfície onde $E = 1 = G$ e $F = \cos\theta(u, v)$, com $0 < \theta(u, v) < \pi$. Prove que a curvatura de Gauss da superfície é
$$K = -\frac{\theta_{uv}}{\sin\theta}.$$

14. Prove que não existe nenhuma superfície que tenha uma parametrização onde $E = 1 = G$, $F = 0$ e $e = 0$, $f = 1 = g$.

15. Existe uma parametrização de uma superfície onde $E = 1$, $F = 0$, $G = \cos^2 u$ e $e = \cos^2 u$, $f = 0$, $g = 1$?